ОСОБЕННОСТИ МЕТОДОЛОГИИ ОЦЕНКИ РОЗНИЧНЫХ РИСКОВ: ПЕРЕХОД ОТ РИСК-КЛАССОВ К ГРЕЙДАМ

Моделирование розничных кредитных портфелей является важной и сложной задачей, а также значимым аспектом стандарта оценки резервов по МСФО 9. Модель, основанная на матрицах миграций и построенная в пространстве риск-классов, обычно обладает существенно большей предсказательной силой, чем подобная ей модель, построенная в пространстве грейдов. В настоящей статье рассматривается задача перехода результатов, полученных в пространстве риск-классов, в пространство грейдов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: розничные кредитные риски, розничные кредитные портфели, матрицы миграций, риск-классы, грейды

Бабиков Владимир Георгиевич — к. ф.-м. н., исполнительный директор ООО «Бизнес системы консалт» (г. Москва)

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Кредитный портфель (например, портфель потребительских кредитов) представляет собой совокупность кредитов, выданных различным заемщикам (физическим лицам) в разное время и на разные сроки. Естественно, что ряд заемщиков может оказаться в сложной ситуации и перестать вносить ежемесячные платежи, таким образом они становятся проблемными клиентами.

Риск-менеджеры должны решать множество задач, включая оценку кредитных рисков и доходности кредитного портфеля. Для этого розничные кредитные портфели разбиваются на однородные пулы по однородным признакам с точки зрения кредитного риска (например, риск-классы, грейды). Затем исследуются процессы переходов заемщиков из одного риск-класса (грейда) в другой, оцениваются частоты переходов между соответствующими состояниями.

Задачи потребительского кредитования можно решить посредством специального подхода «Матричная декомпозиция», рассмотренного в одной из статей автора [3]. В основе данного подхода лежит принцип декомпозиции матриц перехода по следующим трем компонентам:

1) базисная матрица (эффект созревания);
2) матричная компонента фактора качества;
3) матричная компонента макрофактора.

Напомним основные термины и обозначения, необходимые для дальнейшего изложения материала.

Винтаж — группировка кредитов по заданному признаку. Кредиты, образующие определенный винтаж, обладают уникальными характеристиками (качества, досрочного погашения, возобновляемости кредитной линии), которые и являются результатом группировки. Группировки могут подразумевать объединение кредитов по региональному принципу, в зависимости от сроков, на которые они выданы, процентных ставок и времени выдачи. На практике винтаж чаще всего объединяет кредиты, выданные в определенный месяц. Мы будем использовать обозначение t_1 для индексирования месяца, в течение которого выданы кредиты, образующие соответствующий винтаж (Open Date). $N+1$ — количество существующих на данный момент винтажей в портфеле, $t_1 \in \left\{t_1^0, \ldots, t_1^N\right\}$.

Количество месяцев в книге — возраст винтажа k в месяцах (Month-on-Book, MOB). Для индексирования текущего календарного месяца (View Date) мы будем использовать обозначение t_2, тогда:

$$k = t_2 - t_1.$$

DPD (Days-Past-Due) — количество дней просрочки.

Тенор (Tenor) — часть портфеля, сгруппированная по одному сроку кредита в момент выдачи. Срок кредита влияет на скорость его амортизации, поэтому значительные изменения структуры портфеля по сроку существенно воздействуют на поведение этого портфеля.

Риск-класс (Risk Class, RC) — состояние кредита, которое зависит от показателя DPD. Риск-классы определяются следующим образом:

- RC0 — 0 дней;
- RC1 — 1–30 дней;
- RC2 — 31–60 дней и т.д.

Иногда, чтобы уменьшить влияние технической просрочки, риск-классы переопределяют со сдвигом по DPD.

На рис. 1 в качестве примера представлен граф для потребительских кредитов. Предполагается, что существует два поглощающих состояния: списания (Charge-Off, C/O) и возврат основного долга банку (Pay-Down, P/D). Как можно увидеть, кредиты с просрочкой более 120 дней считаются списанными.

Грейд — кредитный рейтинг или мера кредитоспособности частного лица (кредитный скоринг). Грейды могут быть определены в соответствии с интервалами вероятности дефолта (Probability of Default, PD) (DPD — более 90 дней) в течение года согласно некоторой рейтинговой шкале:

- A ($PD = 0{,}00 \ldots 0{,}01$);
- B ($PD = 0{,}01 \ldots 0{,}05$);
- C ($PD = 0{,}05 \ldots 0{,}25$) и т.д.

На рис. 2 показаны миграции основного долга в пространстве грейдов для портфеля потребительских кредитов.

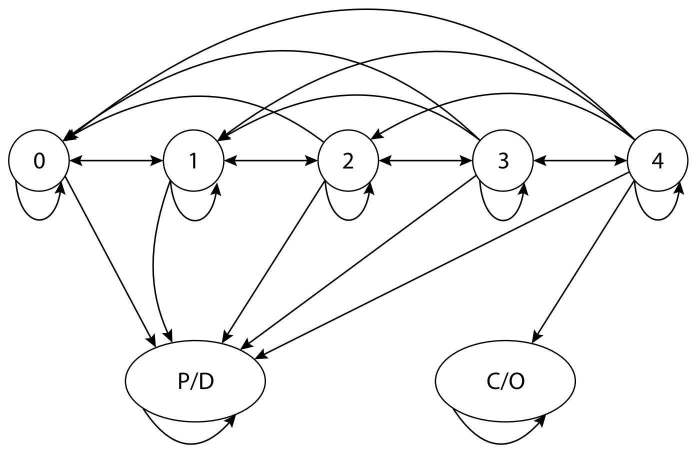
Базисная матрица (матрица созревания) — матрица частот переходов из одного состояния системы в другое (размерность матрицы — $n \times n$, где n — количество состояний системы). Элементы базисной матрицы — это функции частот переходов из риск-класса (грейда) i в риск-класс (грейд) j от k. Переходы кредитов из одного риск-класса (грейда) в другой неоднородны. Эта неоднородность, в частности, объясняется эффектом созревания, а возраст кредита оказывает сильное влияние на вероятности переходов.

Распределение портфеля. Распределение объема основного долга портфеля $\overline{V}(t_2)$ по состояниям (риск-классы, грейды) в текущем месяце t_2 есть вектор состояния всего портфеля:

$$\overline{V}(t_2) = \left(v_0(t_2) v_1(t_2) \ldots\right)^T, \qquad (1)$$

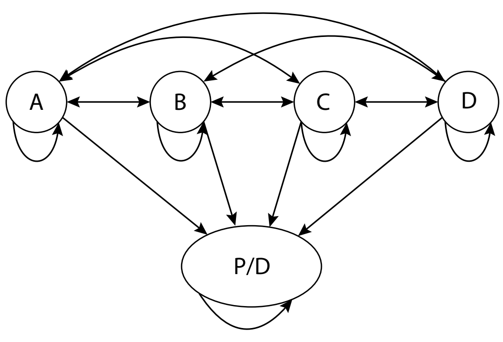
где $v_0(t_2)$ — объем основного долга части кредитного портфеля без просрочки;
$v_1(t_2)$ — объем основного долга части кредитного портфеля с просрочкой от 1 до 30 дней и т.д.;
T — оператор транспонирования.

Рис. 1. Миграции основного долга в пространстве риск-классов для портфеля потребительских кредитов без реструктуризации с двумя поглощающими состояниями (C/O и P/D)



Источник: [3].

Рис. 2. Миграции основного долга в пространстве грейдов для портфеля потребительских кредитов без реструктуризации с одним поглощающим состоянием (P/D)



Винтажное распределение портфеля. Распределение объема основного долга $\vec{V}(t_1, t_2)$ для винтажа t_1 (рассматривается часть портфеля, выданная в некоторый месяц t_1) по просрочкам (по грейдам) в текущем месяце t_2 есть вектор состояния данного винтажа:

$$\vec{V}(t_1, t_2) = \left(v_0(t_1, t_2) v_1(t_1, t_2) \ldots\right)^T. \quad (2)$$

Новый объем — объем выданных кредитов в месяце t_1. В первый месяц наблюдения $t_2 = t_1$, и поскольку количество месяцев в книге $k = t_2 - t_1$, то $k = 0$. Объем новых выдач в период t_1 можно выразить, например, как $v_0(t_1, t_1)$.

Матричная компонента качества рассчитывается как суперпозиция различных винтажных характеристик, она является функцией от t_1. Величина эффекта q для винтажа $t_1 \in \left\{t_1^0, \ldots, t_1^N\right\}$ есть некоторый параметр $\alpha^q(t_1) \in \boldsymbol{\alpha}$, а чувствительность соответствующего эффекта $q \in \{1, \ldots, Q\}$ описывается матрицей $\mathbf{X}_{ij}^q \in \mathbf{X}$ (рассматриваются эффекты, которые связаны только с моментом выдачи, т.е. винтажные характеристики). Тогда матричная компонента качества может быть выражена следующим образом:

$$\sum_{q=1}^{q=Q} \alpha^q(t_1) \mathbf{X}_{ij}^q.$$

Матричная компонента внешнего воздействия рассчитывается как суперпозиция различных характеристик данного календарного периода (таких как макроэкономические факторы, досрочное погашение, процессы сбора просроченной задолженности). Она является функцией от месяца наблюдения t_2. Величина эффекта r для месяца $t_2 \in \left\{t_2^0, \ldots, t_2^M\right\}$ есть некоторый параметр $\beta^q(t_2) \in \boldsymbol{\beta}$, а чувствительность соответствующего эффекта $r \in \{1, \ldots, R\}$ описывается матрицей $\mathbf{Y}_{ij}^r \in \mathbf{Y}$. Таким образом, матричная компонента внешнего воздействия может быть представлена следующим образом:

$$\sum\nolimits_{r=1}^{r=R} \beta^r(t_2)\mathbf{Y}_{ij}^r.$$

Матричная декомпозиция — это аддитивное разложение матрицы переходов на три составляющие, упомянутые в начале статьи:

$$\begin{gathered}\mathbf{X}_{ij}(t_2-t_1, t_1, t_2) = \mathbf{X}_{ij}^0(t_2-t_1) + \\ + \sum\nolimits_{q=1}^{q=Q} \alpha^q(t_1)\mathbf{X}_{ij}^q + \sum\nolimits_{r=1}^{r=R} \beta^r(t_2)\mathbf{Y}_{ij}^r.\end{gathered} \tag{3}$$

Для краткости записи матричную декомпозицию будем обозначать далее как $\{\alpha, \beta, X, Y\}$. Существует набор параметров, который наилучшим образом объясняет историческое поведение портфеля. Следовательно, необходимо определить критерий оптимальности. Набор параметров, удовлетворяющий некоторому критерию оптимальности, будем называть моделью кредитного портфеля. Подробное описание подобного рода моделей представлено в одной из статей автора [3].

Требуется установить связь между известными макроэкономическими временн*ы*ми рядами и параметрами матричной декомпозиции $\{\alpha, \beta, X, Y\}$. Например, известно, что для российской экономики существует сильная связь между уровнем безработицы и переходом из RC0 в RC1 (логика простая, статистическая значимость сильная: заемщик теряет работу и перестает платить по кредиту). На практике желательно выявить полную связь между всеми параметрами декомпозиции и макроэкономическими факторами. Прежде всего это нужно в целях построения сценариев, которые, в свою очередь, необходимы для выполнения требований стандарта МСФО 9. На рис. 3 изображен персептрон для взаимоувязки параметров декомпозиции с макроэкономическими факторами (один из способов, реализованный на платформе RRAS (Roll Rate Analytic System) 3.4).

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Базисная матрица в соответствии с ее определением содержит функциональные зависимости частот переходов от возраста кредита. Эти функциональные зависимости определяют чувствительность индикаторов портфеля к его структуре. Далее эффекты, вызванные зависимостями частот переходов от возраста кредита, мы будем называть эффектами созревания, а функции, описывающие эти эффекты, — темплейтами, или функциями созревания (возраст кредита — аргумент этих функций). На практике эти зависимости оказывают сильное влияние на поведение кредитного портфеля, часто более сильное, чем макроэкономические шоки или изменение качества кредитов.

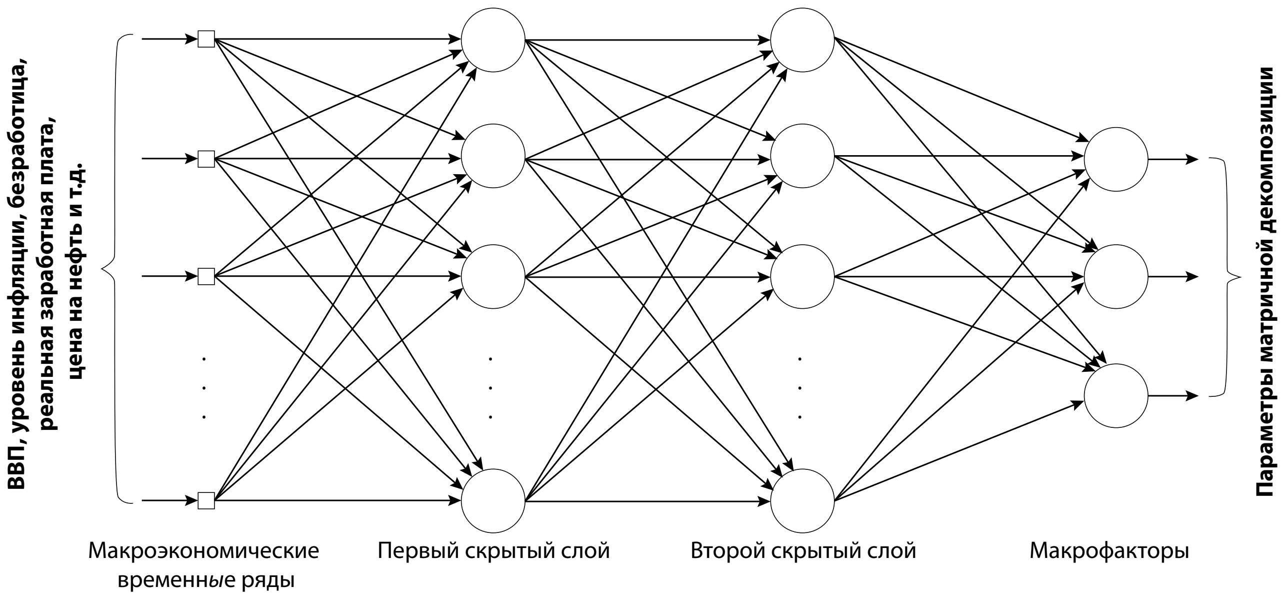
На рис. 4 показан эффект созревания в пространстве риск-классов для потребительских кредитов: частоты переходов из RC1 в RC2, из RC2 в RC3 для срока 36 месяцев в зависимости от возраста кредита (рассматриваются переходы за один месяц).

Ухудшение макроэкономических условий, изменение качества кредитов и процессов сбора просроченной задолженности, досрочное погашение, эффект возобновляемости кредитной линии (для кредитных карт), реструктуризация — все эти факторы также влияют на поведение кредитного портфеля, но являются второстепенными.

Цель декомпозиции согласно формуле (3) — представить поведение кредитного портфеля как совокупность стационарных процессов. Это дает возможность применения методов математической статистики для получения качественных оценок кредитных рисков и прогнозирования параметров кредитного портфеля [2, 3].

На рис. 5 показан эффект созревания в пространстве грейдов для потребительских кредитов:

Рис. 3. Установление взаимосвязи между макроэкономическими факторами и параметрами матричной декомпозиции



частота переходов из грейда B в грейд B (т.е. частота такого события, когда заемщики продолжают оставаться в грейде B) для срока 60 месяцев в зависимости от возраста кредита (рассматриваются переходы за один месяц).

На рис. 6 представлено моделирование в пространстве риск-классов: распределение портфеля в RC1, RC3, RC5. Бэк-тест демонстрирует высокое качество моделирования.

В некоторых случаях требуется построить модели поведения кредитных портфелей не в пространстве риск-классов, а в пространстве грейдов. Это может быть связано с требованиями к моделированию в банке или с внутренними процедурами организации. Численные эксперименты показали, что предсказательная сила модели (в соответствии с методикой, описанной в работах автора [2, 3]), построенной в пространстве грейдов, значительно уступает подобной модели, построенной в пространстве риск-классов. Это связано с рядом причин, например, частой сменой алгоритма рейтингования, изменением рейтинговой шкалы, большим количеством параметров, необходимых для построения модели, и т.д.

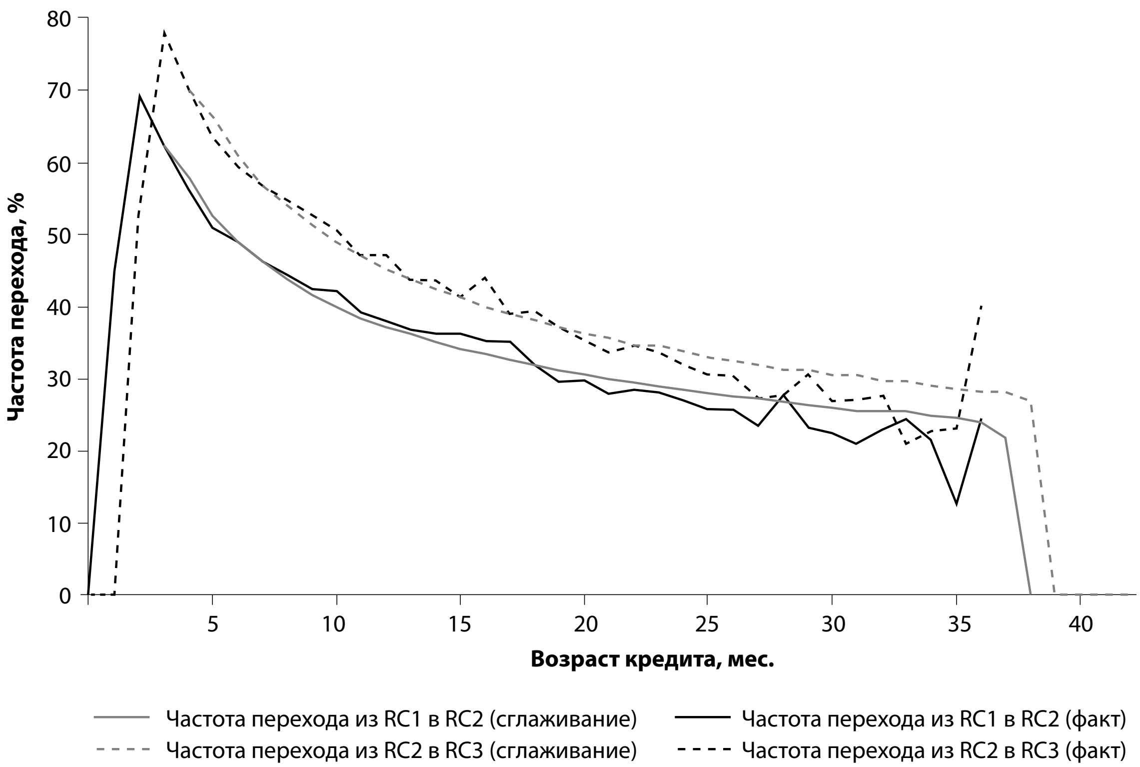
На рис. 7 представлено моделирование в пространстве грейдов: распределение портфеля в грейдах A, B, C. Бэк-тест выявляет отклонения модели, обусловленные сменой алгоритма рейтингования.

Естественным образом возникает задача перехода от одного пространства к другому. В результате решения этой задачи расчеты, полученные в пространстве риск-классов, могут быть транспонированы на пространство грейдов, и наоборот. Итак, приступим к описанию метода.

ОТ РИСК-КЛАССОВ К ГРЕЙДАМ. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

В целях постановки задачи перехода от риск-классов к грейдам введем определение псевдообратной матрицы. $\mathbf{A}^{+}$ называется псевдообратной

Рис. 4. Эффект созревания в пространстве риск-классов



Примечание: здесь и далее для расчета использовалась платформа RRAS 3.4; сглаженные кривые получены посредством алгоритма, встроенного в данную платформу.

матрицей (матрицей Мура — Пенроуза) для матрицы **A**, если она удовлетворяет следующим критериям:

1) $\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{A}$;

2) $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{+}$ ($\mathbf{A}^{+}$ является слабым обращением в мультипликативной полугруппе);

3) $(\mathbf{A}\mathbf{A}^{+})^{*} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{+}$ (это означает, что $\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}$ — эрмитова матрица);

4) $(\mathbf{A}^{+}\mathbf{A})^{*} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{A}$ ($\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}$ — тоже эрмитова матрица).

$\mathbf{M}^{*}$ — эрмитово-сопряженная матрица **M** (для матриц над полем действительных чисел $\mathbf{M}^{*} = \mathbf{M}^{T}$).

Существует эквивалентный способ задания псевдообратной матрицы через предел обратных (регуляризация Тихонова):

$$\mathbf{A}^{+} = \lim_{\delta \to +0} (\mathbf{A}^{*}\mathbf{A} + \delta\mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}^{*} = \lim_{\delta \to +0} \mathbf{A}^{*}(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A} + \delta\mathbf{I})^{-1},$$

где **I** — единичная матрица;

δ — бесконечно малая величина.

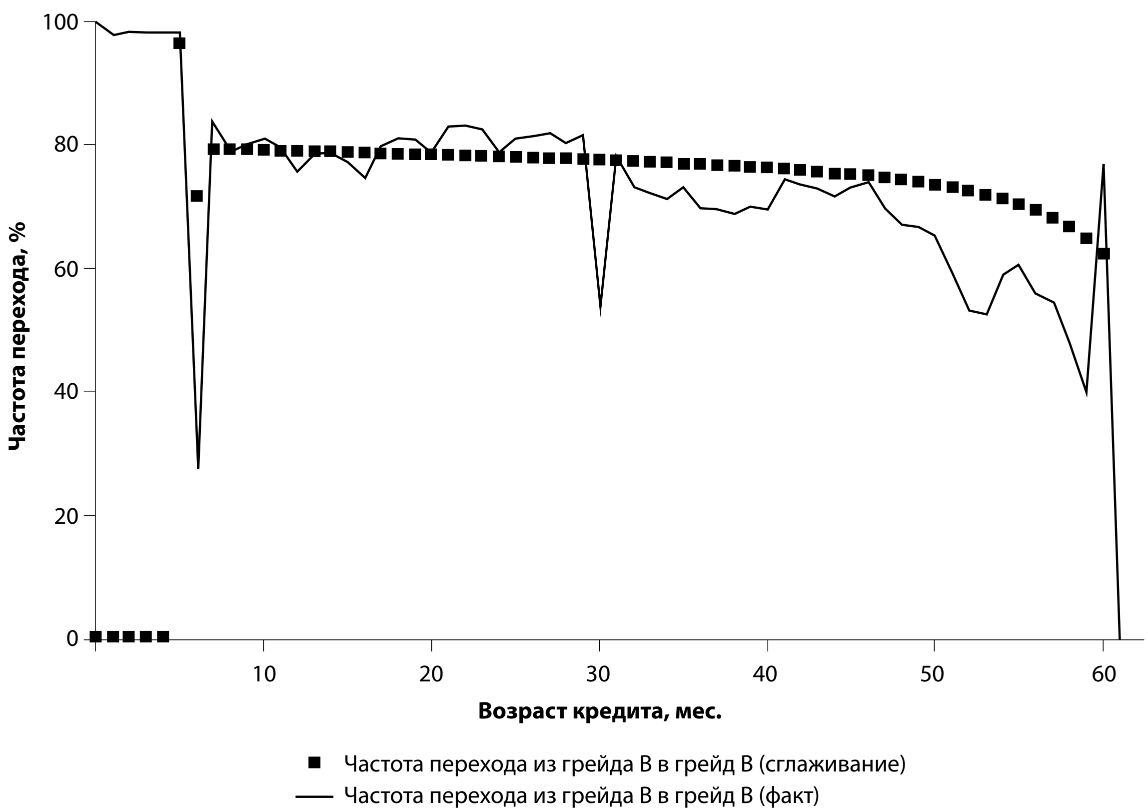
Этот предел существует, даже если $(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A})^{-1}$ и $(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*})^{-1}$ не определены.

Сформулируем задачу. Допустим, существует такая матрица миграций **X** основного долга между риск-классами (RC0, RC1, RC2, …), что:

$$\mathbf{X}\mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{v}^{(k+1)}, \quad (4)$$

где **v** — вектор состояния (распределение поколения кредитов по риск-классам) размерности *n*;

Рис. 5. Эффект созревания в пространстве грейдов



Примечание: скачок частоты на пятом и 30-м MOB обусловлен сменой алгоритма рейтингования.

k — порядковый номер распределения по риск-классам;
K — количество месяцев наблюдения ($k \le K$).

Пусть существует такая матрица миграций **Y** основного долга между грейдами (A, B, C, ...), что:

$$\mathbf{Y}\mathbf{g}^{(k)} = \mathbf{g}^{(k+1)}, \tag{5}$$

где **g** — вектор состояния (распределение поколения кредитов по грейдам) размерности m;
k — порядковый номер распределения по грейдам ($k \le K$).

Требуется найти такое отображение $\mathbf{T}: \mathbf{v} \to \mathbf{g}$ (распределения по риск-классам **v** в распределении по грейдам **g**), что:

$$\mathbf{T}\mathbf{v} = \mathbf{g}. \tag{6}$$

Соответственно:

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}^{+}\mathbf{g}, \tag{7}$$

где **T** — прямоугольная матрица ($n \times m$ — размерность матрицы).

Решение. Из формул (4) и (7) следует, что:

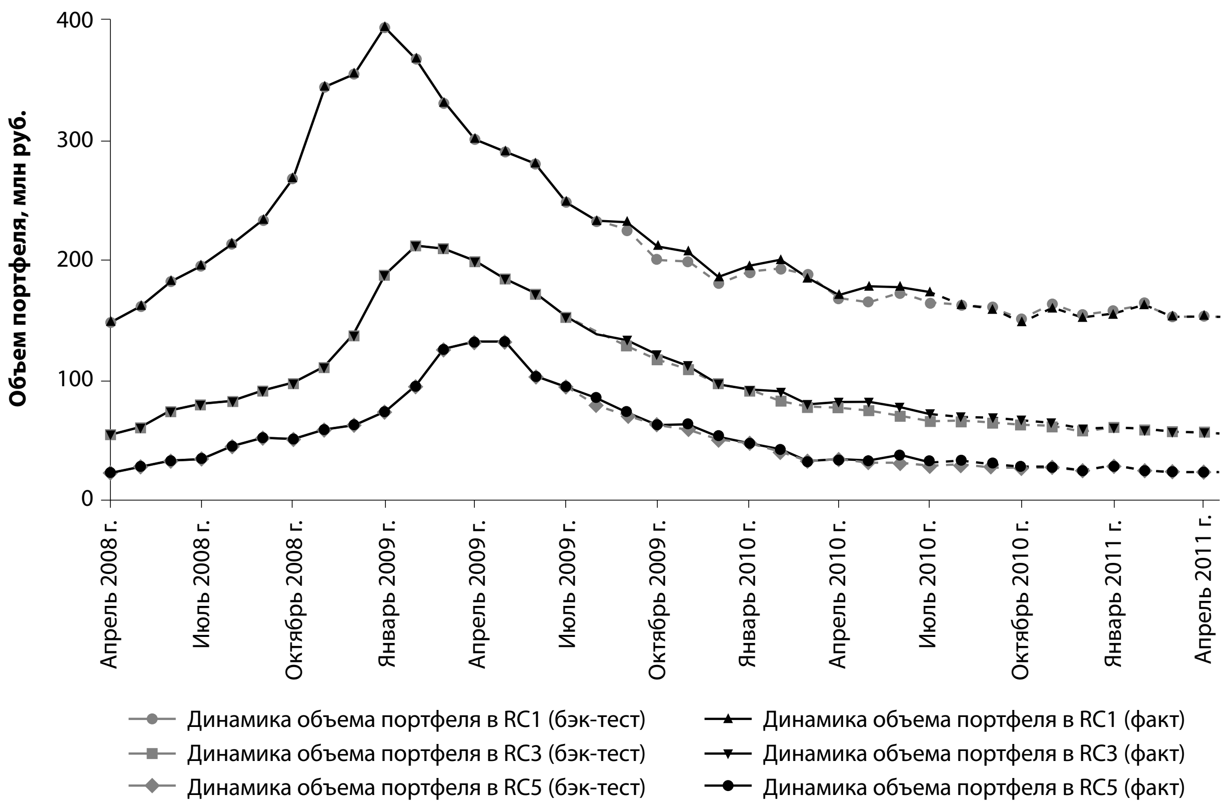
$$\mathbf{X}\mathbf{T}^{+}\mathbf{g}^{(k)} = \mathbf{T}^{+}\mathbf{g}^{(k+1)}.$$

При понижении размерности ($m \le n$) верно, что:

$$\mathbf{T}\mathbf{X}\mathbf{T}^{+}\mathbf{g}^{(k)} = \mathbf{g}^{(k+1)}.$$

Следовательно, согласно выражению (5) существует некоторое преобразование:

Рис. 6. Моделирование в пространстве риск-классов



Примечание: здесь и на рис. 7 пунктиром показан прогноз.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{TXT}^{+}. \qquad (8)$$

Для поиска **T** необходимо минимизировать остатки: $\min\|\mathbf{TV} - \mathbf{G}\|_2$, где $\mathbf{V} = [\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(K)}]$, $\mathbf{G} = [\mathbf{g}^{(1)}, \ldots, \mathbf{g}^{(K)}]$ — наборы векторов-состояний в пространстве риск-классов и в пространстве грейдов соответственно.

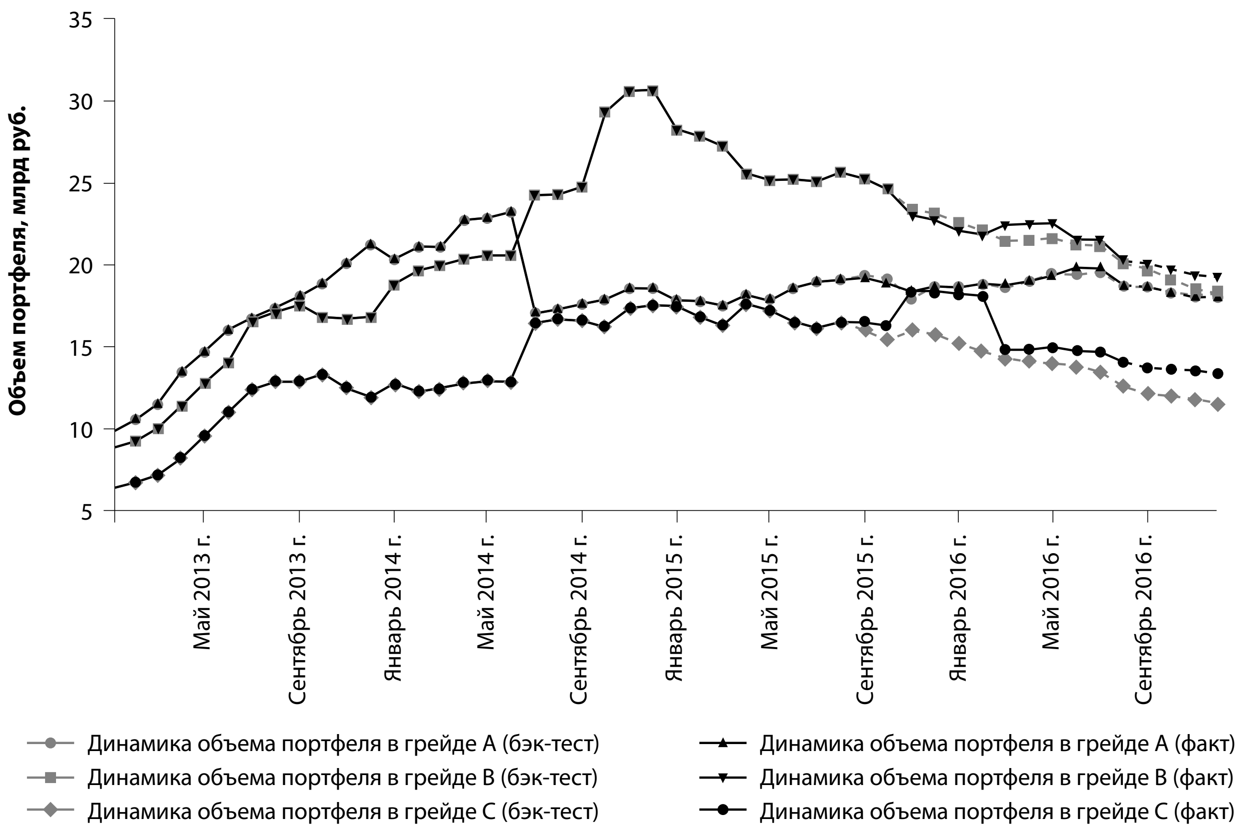
Для решения задачи также необходимо сформулировать некоторые дополнительные требования к ее постановке:

- риск-классы хорошо моделируются по схеме марковских случайных процессов (частоты миграций между риск-классами меняются медленно, более-менее стабильны, иначе говоря, являются условным инвариантом);
- грейды хорошо моделируются по схеме марковских случайных процессов;
- пространства риск-классов и грейдов являются векторными пространствами с евклидовой нормой $\|\mathbf{TV} - \mathbf{G}\|_2$; в целом выбор нормы является отдельной проблемой, но для упрощения постановки задачи будем считать, что в упомянутых пространствах определена евклидова норма.

Тогда с учетом предположения о существовании линейного отображения риск-классов в грейды **T** имеем:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{TXT}^{+}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{V}^{+}\mathbf{G}. \qquad (9)$$

Рис. 7. Моделирование в пространстве грейдов



Таким способом мы можем построить модель с высокой предсказательной силой не только в пространстве риск-классов, но и в пространстве грейдов. Поскольку именно в пространстве риск-классов удается сделать достаточно качественные долгосрочные прогнозы поведения кредитных портфелей однородных ссуд, такой подход может значительно улучшить качество моделирования кредитных портфелей в пространстве грейдов. Так, если необходимо построить оценку распределения кредитного портфеля через s интервалов в момент $k + s$, при условии что задана некоторая матрица миграций основного долга между риск-классами (4) и известно распределение портфеля по риск-классам $\mathbf{v}^{(k)}$ и по грейдам $\mathbf{g}^{(k)}$ в момент k, то получим следующие выражения:

$$\mathbf{X}^s\mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{v}^{(k+s)}, \tag{10}$$

$$(\mathbf{TXT}^+)^s\mathbf{g}^{(k)} = \mathbf{g}^{(k+s)}. \tag{11}$$

По факту миграции как в пространстве риск-классов, так и в пространстве грейдов редко могут быть описаны матрицами-константами **X**, **Y**,

т.к. существуют эффекты созревания, эффекты влияния макроэкономических факторов и т.д.
В более общем случае матрицы миграций являются функциями времени:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(t_2 - t_1, t_1, t_2),$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(t_2 - t_1, t_1, t_2).$$

Запишем формулу (11) в общем виде:

$$\mathbf{g}^{(k)} \prod_{i=k}^{k+s} (\mathbf{T}\mathbf{X}^{(i)}\mathbf{T}^{+}) = \mathbf{g}^{(k+s)}. \quad (12)$$

Методика расчета матриц $\mathbf{X}^{(i)}$ с учетом зависимости от эффекта созревания, влияния макроэкономических факторов, качества кредитов изложена в одной из работ автора [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Автоматизированная информационно-аналитическая система управления кредитными портфелями. — http://www1.fips.ru/wps/portal/IPS_Ru#1549443998744.
2. Бабиков В.Г. Моделирование поведения кредитных портфелей и стресс-тест // Аналитический банковский журнал. — 2013. — №10. — С. 72–77.
3. Бабиков В.Г. Теория и практика розничного кредитования // Управление финансовыми рисками. — 2014. — №1. — С. 44–61.
4. Система и способ управления кредитными портфелями. — http://www1.fips.ru/wps/portal/IPS_Ru#1549443731496.
5. Babikov V.G. (2014). *Automated Information and Analytical Loan Portfolio Management System*. — https://patentimages.storage.googleapis.com/06/13/ef/e9f1474a112c0f/US20140289097A1.pdf.
6. Bauschke H. (1996). «The approximation of fixed points of compositions of nonexpansive mappings in Hilbert space». *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 202(1), pp. 150–159.
7. Breeden J.L., Thomas L., McDonald III J.W. (2008). «Stress-testing retail loan portfolios with dual-time dynamics». *The Journal of Risk Model Validation*, Vol. 2(2), pp. 43–62.
8. Fink G.A. (2003). *Fink Mustererkennung mit Markov-Modellen*. Wiesbaden: Teubner Verlag.
9. Zhang A. (2009). *Statistical Methods in Credit Risk Modeling*. — https://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/63707/ajzhang_1.pdf.