

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА РОЗНИЧНОГО КРЕДИТОВАНИЯ

Автор статьи рассматривает кредитный портфель как процесс, описываемый неоднородной цепью Маркова первого порядка. Используя винтажный анализ, а также основываясь на результатах теоремы о сильной сходимости модифицированных алгоритмов с неподвижной точкой, он осуществляет декомпозицию матриц переходов, что позволяет прогнозировать поведение кредитных портфелей с высокой точностью.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: кредитный портфель, матрица переходов, стресс-тест, просроченная задолженность, кредитный риск, рыночный риск, стратегический риск, поколение кредитов

ВВЕДЕНИЕ

Последствия финансового кризиса 2007–2009 гг. для разных стран различны. В целом ущерб от него составил миллиарды долларов, миллионы рабочих мест во всем мире были утрачены. Особенно важно оценить и исследовать случившееся, чтобы быть готовым к следующей волне кризиса. Более эффективные регуляторные механизмы и передовая практика портфельного менеджмента помогут достичь этой цели и минимизировать возможные последствия очередных финансовых потрясений.

Даже поверхностный анализ статистических данных показывает, что качество ипотечных кредитов в США начало ухудшаться с 2005 г. Американская экономика в тот период была достаточно стабильной, цены на недвижимость росли, а безработица была довольно низкой. Самые же худшие кредиты были выданы в 2007 г. Все типы портфелей во всем мире к этому моменту показали ухудшение качества. В большинстве европейских стран удар пришелся на 2008–2009 гг., в первую очередь благодаря «плохим» кредитам. В настоящей статье этот фактор рассматривается как



Бабиков Владимир Георгиевич — к. ф.-м. н., исполнительный директор ООО «БИЗНЕС СИСТЕМЫ КОНСАЛТ» (г. Москва)

внутренний для кредитного моделирования, и мы будем его называть *фактором качества кредитов*.

Существуют и внешние факторы: преимущественно это влияние макроэкономики, а также сезонность и изменение в бизнес-процессах (далее макрофакторы). В Соединенных Штатах макроэкономические показатели стали ухудшаться в середине 2006 г., и процесс продолжился вплоть до 2009 г. К этому времени макроэкономика находилась в наихудшем своем положении: цены на дома достигли минимума, а безработица — своего максимума. В Европе для большинства кредитных портфелей максимум негативного влияния достиг в январе-феврале 2009 г. Этот удар был также усилен сезонностью, и общая картина выглядела весьма удручающе. Большие лаги созревания дефолтов (главным образом в ипотечных кредитах) замаскировали ухудшение качества новых выданных на месяцы и даже годы.

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением поведения потребительских кредитов. Состоящий из них портфель представляет собой совокупность кредитов, выданных различным заемщикам (физическим лицам) в разное время и на разные сроки. Естественно, что ряд заемщиков может оказаться в сложной ситуации и перестать вносить ежемесячные платежи. Таким образом, они становятся проблемными клиентами. Перед риск-менеджерами возникает задача оценки кредитных рисков, доходности кредитного портфеля и др.

Один из способов решения этой задачи — введение понятия «риск-класс» и исследование процесса перехода заемщиков из одного риск-класса в другой. При этом оценивается частота таких переходов, создаются соответствующие матрицы. Матрицы переходов позволяют оценивать лаги созревания просрочки¹. Кроме того, оказывается, что частота переходов зависит от

возраста кредита. Эта зависимость определяет чувствительность параметров портфеля к его структуре. Далее этот эффект мы будем называть *эффектом созревания*. Данная зависимость оказывает сильное влияние на поведение кредитного портфеля, и зачастую более сильное, чем макроэкономические шоки и изменение качества кредитов.

Наконец, появляется возможность тщательно изучить второстепенные факторы, также влияющие на поведение кредитного портфеля, на его эффективность и параметры. Под второстепенными факторами понимаются эффект досрочного погашения, эффект возобновляемости кредитной линии (для кредитных карт), реструктуризация и др.

Цель декомпозиции поведения кредитного портфеля на различные эффекты объясняется стремлением представить его как совокупность стационарных процессов: такое представление дает возможность применять статистические методы, получать качественные оценки кредитных рисков и прогнозировать параметры кредитного портфеля.

МЕТОДОЛОГИЯ

Все вышеупомянутые аспекты потребительского кредитования могут быть изучены посредством специального подхода, называемого в данной статье *матричной декомпозицией*. Этот метод базируется на принципе декомпозиции матриц перехода по следующим компонентам (для упрощения мы рассматриваем только три компонента):

- базисная матрица (эффект созревания);
- матричная компонента² фактора качества (она включает в себя не один, а ряд факторов, каждый из которых определяется временем выдачи кредита; это может быть и собственно

¹ Рост просрочки не сразу дает о себе знать в полную силу; есть переходный период, например, объем просроченной задолженности 120 дней и более начнет расти в результате негативного воздействия только через четыре месяца после этого воздействия. — *Здесь и далее прим. авт.*

² Матричная компонента — это совокупность факторов, выраженная в матричной форме, объединенная по определенному признаку; в данном случае все факторы этой компоненты являются характеристикой времени выдачи поколения кредитов.

качество кредитов, и досрочное погашение, и др.; ключевым понятием, объединяющим эти факторы, является поколение кредитов, выданных в определенный период времени t_1);

■ матричная компонента макрофактора (включает в себя ряд факторов, каждый из которых определяется календарным временем; это может быть и собственно влияние макроэкономики, и изменения в процессе сбора просроченной задолженности; ключевым понятием, объединяющим эти факторы, является текущее время t_2).

Для описания вышеупомянутого подхода нам понадобится соответствующая терминология. К настоящему времени уже существует ряд устойчивых терминов, хотя он и не полностью охватывает все интересующие нас процессы поведения кредитных портфелей. Итак, сформулируем основные определения и введем требуемые обозначения.

Винтаж — это группировка кредитов по заданному признаку; кредиты, образующие определенный винтаж, обладают уникальными характеристиками качества, досрочного погашения, возобновляемости. Большинство группировок

подразумевает объединение кредитов по региональному принципу, формируются пулы с определенными сроками, на которые выданы кредиты, процентными ставками и временем выдачи. В этой работе винтаж объединяет кредиты, выданные в определенный месяц: $t_1 \in \{t_1^0, \dots, t_1^N\}$. Далее индекс t_1 будет использоваться для обозначения месяца, в период которого выданы кредиты, образующие соответствующий винтаж. $N + 1$ — количество существующих на данный момент винтажей в портфеле.

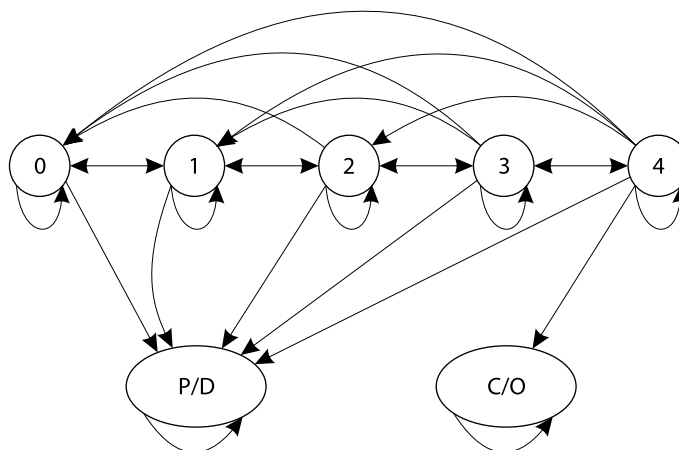
Риск-класс (Risk Class — RC) — состояние просрочки, которое зависит от количества *дней просрочки по кредиту* (Days Past Due — DPD):

- RC0 — 0 DPD;
- RC1 — 1–30 DPD;
- RC2 — 31–60 DPD и т.д.

В качестве примера рис. 1 демонстрирует граф для потребительских кредитов, кредиты с просрочкой $120 +$ DPD считаются списанными. В этом примере существует два поглощающих состояния: списания (Charge-Off, или C/O) и возврата основного долга банку (Pay-Down, или P/D).

Количество месяцев в книге — возраст винтажа (k) в месяцах (Month on Book — MOB, $k = t_2 - t_1$).

Рис. 1. Цепь Маркова для портфеля потребительских кредитов без реструктуризации



Срок кредита. Кредиты могут выдаваться на разный срок, таким образом, их можно группировать по сроку. Значительные изменения структуры портфеля по сроку сильно влияют на поведение этого портфеля. Часть портфеля, сгруппированную по одному сроку, мы будем называть «тенором» (Tenor, Term). Порядковый номер тенора будем обозначать как θ , а срок соответствующего тенора как $Term_{\theta}$.

Базисная матрица — матрица частот переходов из одного состояния системы в другое (размерность матрицы — $n \times n$, где n — количество состояний системы). В соответствии с процессом, изображенным в виде графа на рис. 1, базисная матрица будет выглядеть следующим образом:

$$X_{ij}^{\theta}(k) = \begin{pmatrix} x_{00}(k) & x_{01}(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{06}(k) \\ x_{10}(k) & x_{11}(k) & x_{12}(k) & 0 & 0 & 0 & x_{16}(k) \\ x_{20}(k) & x_{21}(k) & x_{22}(k) & x_{23}(k) & 0 & 0 & x_{26}(k) \\ x_{30}(k) & x_{31}(k) & x_{32}(k) & x_{33}(k) & x_{34}(k) & 0 & x_{36}(k) \\ x_{40}(k) & x_{41}(k) & x_{42}(k) & x_{43}(k) & x_{44}(k) & x_{45}(k) & x_{46}(k) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где x — частота переходов. Например, $x_{40}(k)$ означает частоту переходов из состояния 4 в состояние 0 при k месяцев в книге, что означает частоту переходов из четвертого риск-класса (просрочка 91–120 дней) в нулевой риск-класс (отсутствие просрочки) тогда, когда возраст поколения кредитов достигает k месяцев.

Каждый элемент матрицы есть функция частоты перехода из риск-класса i в риск-класс j от k , где k — возраст винтажа (количество месяцев в книге). В дальнейшем такую функцию мы будем называть функцией созревания. Переходы кредитов из одного риск-класса в другой неоднородны, и, в частности, эта неоднородность объясняется эффектом созревания, т.е. возраст кредита оказывает влияние на вероятность перехода. При наличии достаточной статистики функции созревания могут быть получены путем усреднения частот переходов по всем винтажам (в общем случае необходимо применять более сложные методы).

Распределение портфеля. Распределение объема основного долга портфеля $\overline{V}(t_2)$ (2) по просрочкам в текущем месяце t_2 (далее индекс t_2 мы будем применять только для обозначения календарного месяца) есть вектор состояния всего портфеля, в данном примере рассмотрен потребительский кредит без реструктуризации (см. рис. 1):

$$\overline{V}(t_2) = (v_0(t_2) \ v_1(t_2) \ \dots \ v_6(t_2))^T. \quad (2)$$

Винтажное распределение портфеля. Распределение объема основного долга \overline{V}_{t_1, t_2} для винтажа t_1 (рассматривается часть портфеля, выданная в некоторый месяц t_1) по просрочкам в текущем месяце t_2 есть вектор состояния данного винтажа, в этом примере также рассмотрен потребительский кредит без реструктуризации:

$$\overline{V}(t_1, t_2) = (v_0(t_1, t_2) \ v_1(t_1, t_2) \ \dots \ v_6(t_1, t_2))^T. \quad (3)$$

Новый объем — это объем выданных кредитов в месяце t_1 . В первый месяц наблюдения $t_1 = t_2$, и т.к. количество месяцев в книге $k = t_2 - t_1$, то $k = 0$. Объем новых выдач можно выразить, например, как $v_0(t_1, t_1)$.

Матричная компонента качества рассчитывается как суперпозиция различных винтажных характеристик. Эта компонента является функцией от t_1 . Величина эффекта q для винтажа $t_1 \in \{t_1^0, \dots, t_1^M\}$ есть некоторый параметр $\alpha^q(t_1) \in \alpha$, а чувствительность соответствующего эффекта $q \in \{1, \dots, Q\}$ описывается матрицей $X_{ij}^q \ q \in X$. Тогда матричная компонента качества может быть выражена как

$$\sum_{q=1}^{Q} \alpha^q(t_1) X_{ij}^q.$$

Матричная компонента внешнего воздействия рассчитывается как суперпозиция различных характеристик данного периода. Она является функцией от месяца наблюдения t_2 . Величина эффекта r для месяца $t_2 \in \{t_2^0, \dots, t_2^M\}$ есть некоторый параметр $\beta^r(t_2) \in \beta$, а чувствительность соответствующего эффекта $r \in \{1, \dots, R\}$ описывается матрицей $Y_{ij}^r \in Y$. Таким образом, матричная компонента внешнего воздействия может быть представлена как $\sum_{r=1}^R \beta^r(t_2) Y_{ij}^r$.

Матричная декомпозиция — это аддитивное разложение матрицы переходов на следующие составляющие: базисная матрица (эффект созревания), матричная компонента качества и матричная компонента внешнего воздействия:

$$X_{ij}(t_2 - t_1, t_1, t_2) = X_{ij}^0(t_2 - t_1) + \sum_{q=1}^{q=Q} \alpha^q(t_1)X_{ij}^q + \sum_{r=1}^{r=R} \beta^r(t_2)Y_{ij}^r. \quad (4)$$

Если кредитный портфель состоит из разных теноров θ , т.е. в составе кредитного портфеля имеются кредиты, выданные на разные сроки, то для уточнения его чувствительности используются дополнительные параметры $\zeta_\theta^q \in \zeta$, $\eta_\theta^r \in \eta$ (η и ζ — поправочные коэффициенты, учитывающие, что чувствительность отдельных теноров различна; так, например, чувствительность к фактору кредитов, выданных на 36 месяцев, может отличаться от чувствительности кредитов, выданных на 60 месяцев):

$$X_{ij}^\theta(t_2 - t_1, t_1, t_2) = X_{ij}^{\theta,0}(t_2 - t_1) + \sum_{q=1}^{q=Q} \zeta_\theta^q \alpha^q(t_1)X_{ij}^q + \sum_{r=1}^{r=R} \eta_\theta^r \beta^r(t_2)Y_{ij}^r. \quad (5)$$

Для краткости записи матричную декомпозицию будем далее обозначать как $\{\zeta, \eta, \alpha, \beta, X, Y\}$. Этот набор параметров необходим для осуществления декомпозиции. Само собой, существует набор таких параметров, который наилучшим образом объясняет историческое поведение портфеля, и, следовательно, нам необходимо определить критерий оптимальности для данного случая. Набор параметров, удовлетворяющий критерию оптимальности, мы будем называть *моделью кредитного портфеля*.

Следовательно, *модель кредитного портфеля* — это такая матричная декомпозиция $\{\zeta, \eta, \alpha, \beta, X, Y\}^{*3}$, которая удовлетворяет критерию оптимальности.

Бизнес-сценарий — это сценарные характеристики винтажей (объемы новых выдач $v^\theta(t_1)$ и их качество $\alpha^q(t_1) \in \alpha$ для $t_1 \in \{t_1^{N+1}, \dots, t_1^{N^*}\}$ и $q \in \{1, \dots, Q\}$). По сути, план развития бизнеса — это один из бизнес-сценариев.

Сценарии внешнего воздействия — это сценарные характеристики $\beta^r(t_2) \in \beta$ месяцев для $t_2 \in \{t_2^{M+1}, \dots, t_2^{M^*}\}$ и $r \in \{1, \dots, R\}$. Под сценарием внешних воздействий понимается оценка развития экономических тенденций (например ВВП, безработицы и т.д.), изменение в системе сбора просроченной задолженности, сезонность.

Критерий оптимальности. Предположим, что существует оценка распределения портфеля по состояниям $\widehat{V}(t_2^m), \forall m \in \{1, \dots, M\}$ (подразумевается, что портфель содержит различные тенора θ и винтажи, выданные в период с t_1^0 по t_1^N), которая задается следующим выражением:

$$\widehat{V}(t_2^m) = \sum_{\theta} \left(\sum_{t_1=t_1^0}^{t_1^N} \widehat{V}^\theta(t_1, t_2^m) \right), \quad (6)$$

$$\text{где } \widehat{V}^\theta(t_1, t_2^m) = \left(\prod_{t_2=t_1}^{t_2^m} X_{ij}^\theta(t_2 - t_1, t_1, t_2) \right) \overline{V}^\theta(t_1, t_1),$$

$\forall m \in \{1, \dots, M\}$.

Далее предположим, что критерий оптимальности модели кредитного портфеля задан следующим выражением:

$$\sum_{t_2=t_2^0}^{t_2^M} \left(\overline{\varepsilon}(t_2)^T \Omega \overline{\varepsilon}(t_2) \right) \rightarrow \min_{\zeta, \eta, \alpha, \beta, X, Y}, \quad (7)$$

где $\overline{\varepsilon}(t_2^m)$ есть разностный вектор между фактическим распределением портфеля и его оценкой

$$\overline{\varepsilon}(t_2^m) = \overline{V}(t_2^m) - \widehat{V}(t_2^m), \forall m \in \{1, \dots, M\}$$

и где Ω есть некоторая матрица, определяющая веса и тип ошибок. Тогда мы будем считать, что задан критерий оптимальности над пространством параметров $\{\zeta, \eta, \alpha, \beta, X, Y\}$.

³ Символ «*» означает, что представленная совокупность параметров является оптимальной с точки зрения критерия оптимальности; такие совокупности параметров мы в дальнейшем будем называть моделью кредитного портфеля.

ТЕОРИЯ

Теперь нам необходимо ответить на вопрос о том, достаточно ли сказанного для построения модели кредитного портфеля, позволит ли критерий оптимальности найти необходимые параметры, которые объясняют историческое поведение кредитного портфеля. Для этого сформулируем и докажем лемму 1.

Лемма 1: предположим, что над пространством параметров $\{\zeta, \eta, \alpha, \beta, X, Y\}$ посредством выражения (7) задан критерий. Кроме того, предположим, что этот критерий неявно задает алгоритм ψ :

$$\{\zeta, \eta, \alpha, \beta, X, Y\}^{k+1} = \psi(\{\zeta, \eta, \alpha, \beta, X, Y\}^k),$$

который удовлетворяет условиям теоремы 1 о сильной сходимости модифицированных алгоритмов с неподвижной точкой⁴ (Modified fixed point algorithm), рассматриваемой ниже. Тогда алгоритм ψ сводится к $\{\zeta, \eta, \alpha, \beta, X, Y\}^*$, и полученная модель кредитного портфеля удовлетворяет критерию оптимальности, а сходимость алгоритма определяется как сильная.

Доказательство: главным образом лемма 1 определяет алгоритм, который является частным случаем абстрактного алгоритма:

$$x^{k+1} = \psi(x^k) \quad (8)$$

для решения задачи $x = \psi(x)$, где $x \in V$ — элемент гильбертова пространства. Алгоритм (8) не удовлетворяет условиям теоремы о сильной сходимости $\{x^k\}$, даже когда оператор $\psi: V \rightarrow V$ нерасширяющий⁵.

Однако возможна реализация алгоритма (8), при которой он обладает сильной сходимостью [11] при некоторых слабых ограничениях. Это, например, алгоритм с фиксированной точкой, сформулированный в теореме 1 о сильной сходимости модифицированных алгоритмов с неподвижной точкой. Лемма доказана.

В свете сказанного мы приходим к заключению, что существует такой алгоритм последовательных приближений, который позволяет найти модель кредитного портфеля, удовлетворяющую заданному критерию оптимальности, и, значит, наилучшим образом объясняет историческое поведение кредитного портфеля, устанавливая связь между эффектом созревания, качественными характеристиками кредитного портфеля и внешними факторами.

При доказательстве леммы 1 мы пользовались теоремой 1, которая формулируется следующим образом.

Теорема 1: пусть задан алгоритм (оператор) $\psi: V \rightarrow V$, где V есть гильбертово пространство. Рассмотрим последовательность:

$$x^{k+1} = \beta_k z^0 + (1 - \beta_k) \psi(x^k).$$

Эта последовательность сильно сходится к некоторому решению x^* , так что:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{x^k\} \rightarrow x^*, \quad x^* = \psi(x^*).$$

При условии что оператор ψ нерасширяющий, а $z^0 \in V$ есть произвольный элемент гильбертова пространства:

$$(I): \beta_k \in [0, 1]$$

$$(II): \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 0$$

$$(III): \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = \infty$$

$$(IV): \lim_{k \rightarrow \infty} (\beta_k - \beta_{k-1})(\beta_k)^{-1} = 0.$$

Доказательство: оно впервые было получено Хальперном [8]. Более строгое доказательство было получено Баушке [2]. В целом касательно широкого класса задач в банаховом пространстве работа Iterative algorithms for nonlinear operators [11] дает обобщение теоремы 1.

Итак, мы можем объяснить то, что случилось в прошлом. Как теперь научиться прогнозировать

⁴ Точка \bar{f} называется неподвижной точкой оператора A , если $\bar{f} = A\bar{f}$. A удовлетворяет условию Липшица на D (где D — банахово пространство) с константой Липшица q , если существует такое q , что $\|Af - Ag\| \leq q\|f - g\|$, $f, g \in D$.

⁵ Оператор A , удовлетворяющий условию Липшица с константой $q \leq 1$, называется нерасширяющим.

будущее, используя модель кредитного портфеля $\{\zeta, \eta, \alpha, \beta, X, Y\}^*$? Для этого кроме модели нам необходимо иметь как бизнес-сценарии, так и макроэкономические сценарии.

Теорема 2 (моделирование кредитного портфеля): предположим, что модель кредитного портфеля $\{\zeta, \eta, \alpha, \beta, X, Y\}^*$ удовлетворяет критерию оптимальности (7). Далее предположим, что заданы бизнес-сценарии $v_0(t_1, t_1), \alpha^q(t_1)$, где $t_1 \in \{t_1^{N+1}, \dots, t_1^N\}$, $q \in \{1, \dots, Q\}$ и сценарии внешних воздействий $\beta^r(t_2)$, где $t_2 \in \{t_2^{M+1}, \dots, t_2^M\}$, $r \in \{1, \dots, R\}$. Далее

предположим, что $\overline{V^\theta(t_1, t_2^M)}, \forall \theta, \forall t_1 \in \{t_1^0, \dots, t_1^N\}$ есть текущее распределение портфеля по винтажам и по просрочкам. Тогда оценка будущего поведения портфеля может быть задана следующим выражением:

$$\widehat{V(t_2^m)} = \sum_{\theta} \left(\sum_{t_1=t_1^0}^{t_1^N} \overline{V^\theta(t_1, t_2^m)} \right), \quad (9)$$

где

$$\overline{V^\theta(t_1, t_2^m)} = \left(\prod_{t_2=t}^{t_2^m} X_{ij}^\theta(t_2 - t_1, t_1, t_2) \right) \overline{V^\theta(t_1, t)},$$

$$\begin{cases} t_2^M, & \text{если } t_2^M > t_1; \\ t_1, & \text{если } t_2^M \leq t_1; \end{cases}$$

$$\forall m \in \{M+1, \dots, M^*\}.$$

Тогда при реализации заданных бизнес-сценария и сценария внешнего воздействия оценка (9) будет удовлетворять критерию оптимальности (10):

$$\sum_{t_2=t_2^{M+1}}^{t_2^{M^*}} \left(\overline{\varepsilon(t_2)}^T \Omega \overline{\varepsilon(t_2)} \right) \rightarrow \min_{\zeta, \eta, \alpha, \beta, X, Y}. \quad (10)$$

Доказательство: справедливость этой теоремы вытекает из леммы 1. Согласно лемме 1, матричная декомпозиция $\{\zeta, \eta, \alpha, \beta, X, Y\}^*$ минимизирует взвешенную сумму квадратов остатков на интервале $t_2 \in \{t_2^0, \dots, t_2^M\}$. По условиям теоремы корректные бизнес-сценарии и сценарии внешних воздействий заданы для интервала $t_2 \in \{t_2^{M+1}, \dots, t_2^{M^*}\}$. Если же реализация внешнего воздействия

и бизнес-реализация совпадают со сценарными, то в этом случае становится очевидно, что выражение (9) минимизирует взвешенную сумму квадратов остатков (10).

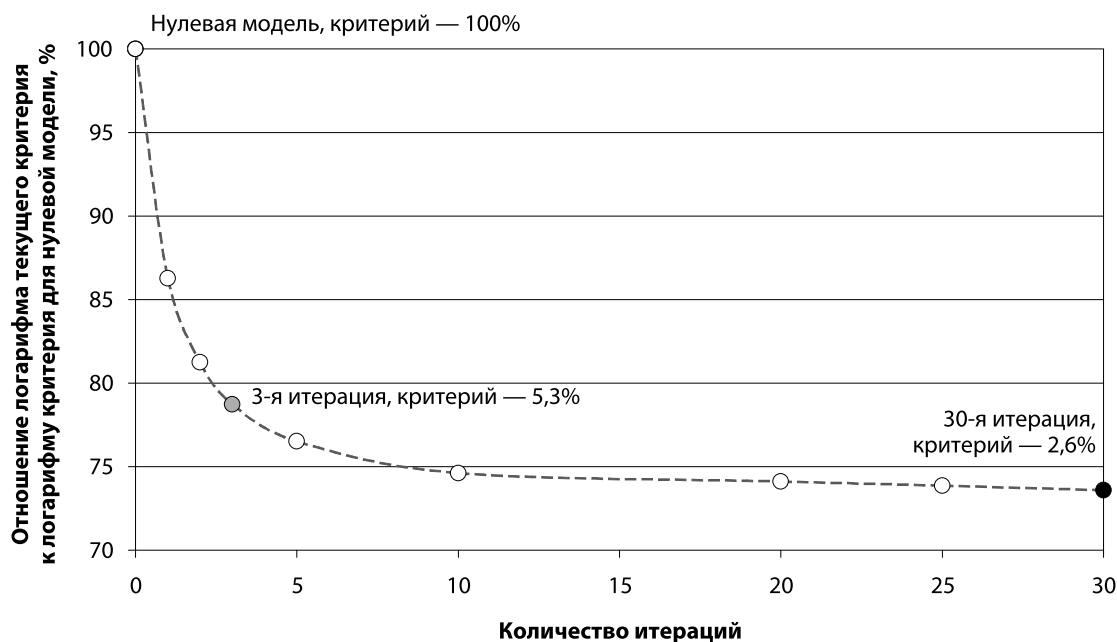
При декомпозиции матриц переходов на несколько стационарных процессов подбираются параметры этих процессов, и, как следствие, задавая верные параметры на будущее, модель верно «угадывает» поведение всего портфеля в перспективе. Было экспериментально установлено, что прогнозы действительно обладают высокой точностью. Так, если бизнес-план был выполнен, а фактические макроэкономические тренды совпадали с прогнозом, то и фактическое поведение кредитного портфеля совпадало с прогнозом по модели.

ЭМПИРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Неявно заданный алгоритм (лемма 1) может применяться для того, чтобы настроить существующую модель для целей долгосрочного прогнозирования. Эмпирически было установлено, что алгоритм по лемме 1 сходится. К слову, сходимость алгоритма достаточно быстрая, как правило, двух-трех итераций достаточно, но в ряде случаев полезно получить более точные оценки.

Рис. 2 демонстрирует процесс сходимости, по оси ординат отображается логарифм взвешенной суммы отклонений модели от реальных данных (7). За 100% принимается начальная фаза — так называемая нулевая модель, когда модель строится с использованием только базисной матрицы. Ось абсцисс отображает количество итераций.

При помощи описанных алгоритмов мы можем изучать влияние различных факторов на поведение кредитных портфелей, кроме того, у нас появляется инструмент для построения высокоточных прогнозов поведения кредитных портфелей при условии воздействия факторов различной природы и для различных сценариев (бизнес-сценариев и сценариев внешнего воздействия).

Рис. 2. Минимизация критерия методом последовательных приближений

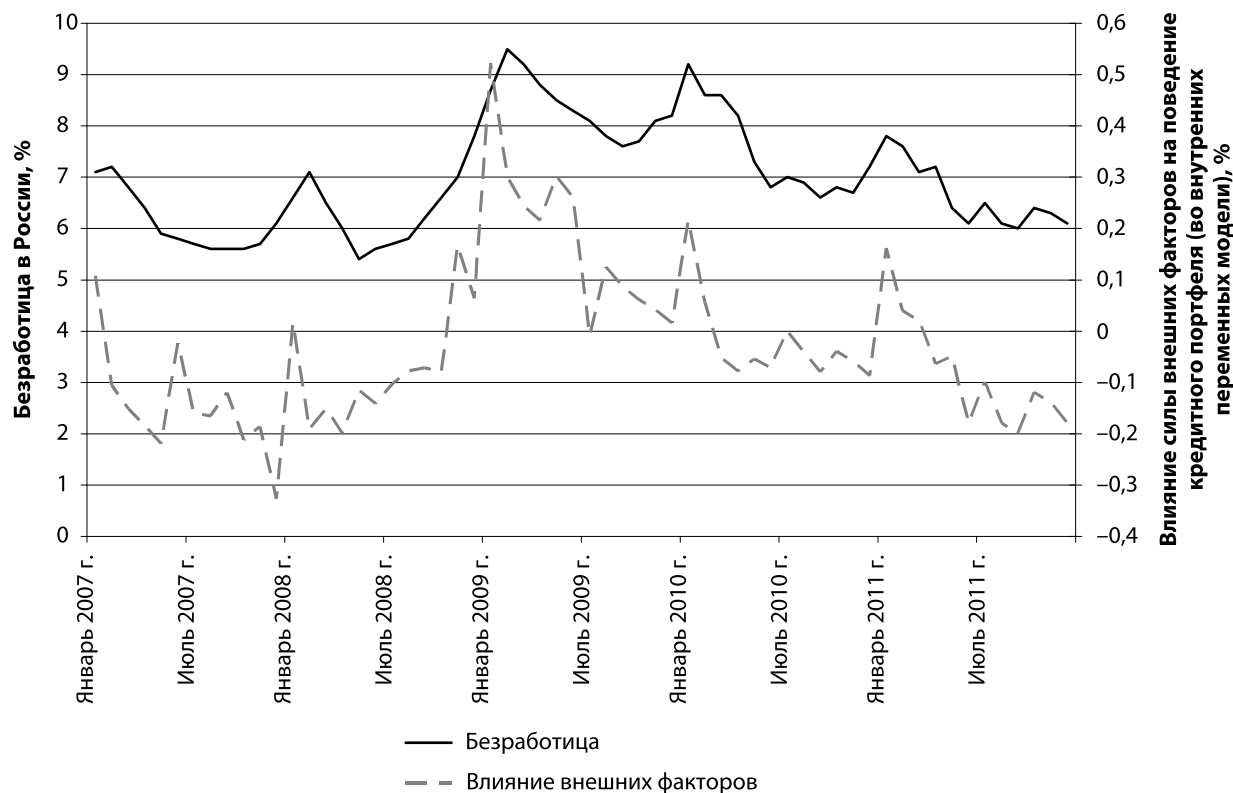
Исследование поведения кредитных портфелей на уровне матриц переходов дает большие преимущества и возможность построить мощную аналитическую систему. Способность прогнозировать частоту переходов из состояния в состояние существенно расширяет спектр возможных аналитических отчетов. Также с помощью такой системы можно получить оценки потерь и резервов в динамике для различных макроэкономических и бизнес-сценариев. Наиболее значимым является развитый функционал для стресс-тестирования кредитных портфелей при различных макроэкономических сценариях. С его помощью просто и удобно сравнивать потери для различных портфелей, изучать факторы, влияющие на их поведение.

Высокая точность расчетов позволяет строить модели страхования рисков. При управлении кредитными портфелями наиболее значимыми рисками являются кредитный и рыночный

(а именно риск процентной ставки), и существует возможность хеджирования одновременно как риска процентной ставки, так и кредитного риска. Такая система может быть построена на основании результатов теоремы 2 (модели матричной декомпозиции). Эта теорема также определяет алгоритмы стресс-тестирования для всех типов кредитных портфелей.

Возможность изучать макроэкономические кризисы — важнейший результат этой работы (рис. 3). Агрегирование данных по различным странам и использование высокоточной аналитической системы обеспечивает возможность существенно повысить эффективность бизнеса.

Результаты теоремы 2 были многократно проверены на практике для всех типов кредитных портфелей (потребительских кредитов, кредитных карт, ипотеки и автокредитов) в условиях постоянно меняющейся экономики. Рис. 4 иллюстрирует бэк-тестинг, проведенный в условиях

Рис. 3. Данные по безработице и по влиянию силы внешних факторов на поведение кредитного портфеля

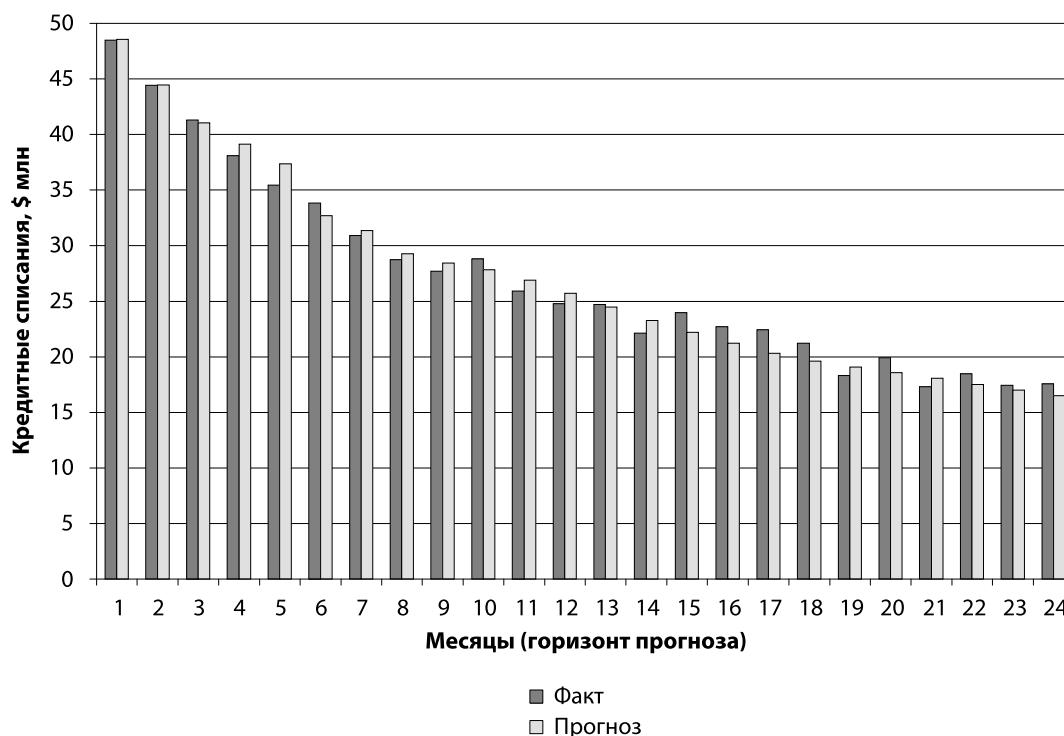
стабильной макроэкономике, при соответствии бизнес-сценария фактической реализации (т.е. ежемесячные выдачи соответствовали фактическим по объему и качеству). Этот пример наглядно демонстрирует, что модель, построенная на принципах матричной декомпозиции, обыгрывает все структурные изменения портфеля по срокам и качеству. Неопределенность, связанная с внешними факторами, сохраняется, но по факту и она в этом случае локализована и влияет на кредитный портфель в известных пределах.

Перейдем к характеристике воздействия макроэкономических шоков на кредитную систему. Описанный в статье метод дает существенно более точные оценки поведения кредитных портфелей

по сравнению с аналогами, применяемыми в практике риск-менеджмента, особенно в ситуации, когда портфель подвержен существенным изменениям в процессе сбора просроченной задолженности, при значительных изменениях макроэкономике (например в условиях кризиса), а также структуры портфеля.

На рис. 5 показана типичная динамика отклика кредитного портфеля на воздействие кризиса. Наибольшие потери, как правило, вызваны кредитным риском, риском процентной ставки и стратегическим риском. Кредитный риск в период кризиса возрастает вследствие безработицы и снижения заработной платы, риск процентной ставки связан с ростом стоимости фондирования,

Рис. 4. Бэк-тестинг: сравнительный анализ списаний по факту и по базисному сценарию с горизонтом планирования, равным двум годам



а стратегический возникает из-за резкого сокращения портфеля (таков обычный результат реакции менеджмента на рост неопределенности и негативные новости). При снижении кредитного и рыночного риска растет стратегический риск, и оптимальные решения в период нестабильности позволяют существенно снизить общие потери.

Кроме расчетов и прогнозов показателей кредитного портфеля заявленные расчетные методы позволяют изучать свойства таких портфелей, строить зависимости одних показателей от других. Перечислим некоторые из задач, решение которых требуется для эффективного управления кредитными портфелями. Это, например, оценка полных списаний кредитов по поколениям в условиях разных сценариев развития макроэкономики, оценка эффективности кредитов

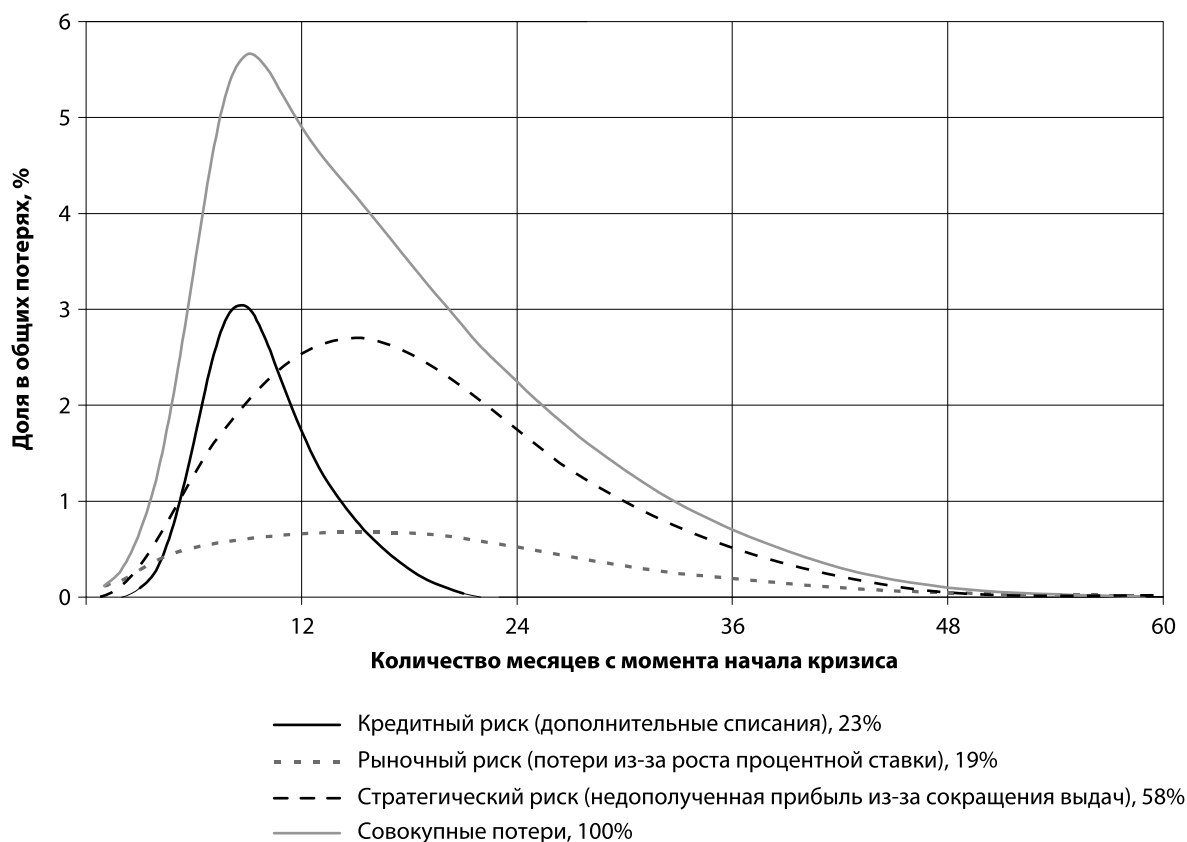
по поколениям и по тенорам, поиск оптимальных клиентских ставок, определение ставки безубыточности и др.

Рассмотрим задачу оценки списаний по поколениям кредитов. Допустим, портфельный риск-менеджер для определения качества кредитов использует показатель LTS (Loss-to-Sale). Введем определение этого показателя для портфеля потребительских кредитов (на практике разные банки по-разному определяют этот показатель).

LTS_{θ} — это накопленные списания при просрочке 120 и более дней на конец срока кредитов, кратко $120+(ever)@Term_{\theta}$, для тенора θ со сроком выдачи, равным $Term_{\theta}$.

LTS — это накопленные списания при просрочке 120 и более дней на конец максимального срока кредитов в поколении, или кратко

Рис. 5. Пример воздействия кризиса на кредитную систему: добавочные потери, связанные с реализацией основных рисков при негативном влиянии макроэкономики

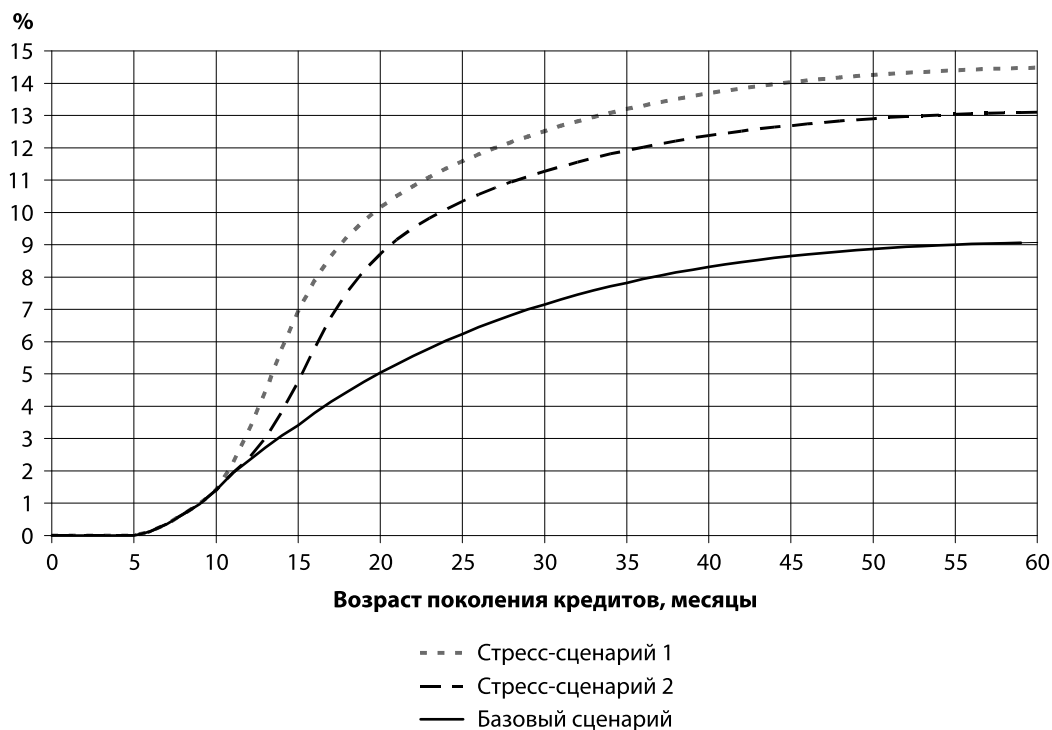


120+(ever)@MaxTerm, для поколения, в котором максимальный срок кредита равен MaxTerm.

Посредством оценки матриц переходов для различных сценариев мы «достаиваем» зависимость *LTS* по каждому поколению кредитов до полного созревания, используя как накопленную статистику по *LTS*, так и статистику поведения матриц переходов. При этом у нас появляется возможность моделирования поведения кредитов одного качества, но разного срока или же одного качества и одного срока, но для разных сценариев внешнего воздействия. На рис. 6 и 7 показано, как созревают *LTS* для разных теноров и как

воздействуют макроэкономические шоки на этот показатель. В частности, на рис. 6 представлены базисный и два стрессовых сценария одинаковой силы, но сдвинутые по времени. Из графика видно, что более раннее негативное внешнее воздействие на поколение приводит к большему росту *LTS*. Рис. 7 демонстрирует для базисного и стрессового сценариев поведение поколения кредитов одного качества со сроками на 36 и 60 месяцев. Анализ показывает, что одинаковое воздействие внешних факторов приводит к большему росту *LTS* у поколений с большим сроком. На рис. 8 и 9 представлено, как шок внешнего

Рис. 6. Созревание *LTS* (базовый и стрессовые сценарии, тенор 60 месяцев)



воздействия, аналогичный кризису 2008–2009 гг., воздействует на разные тенора и при различных лагах.

Пользуясь методологией, описанной в этой статье, удалось изучить зависимость *LTS* от срока кредитов. Также был проведен ряд экспериментов с реальными данными, которые подтвердили изложенный нами научный подход. Эмпирические результаты практически полностью совпали с теоретическими расчетами, и были получены теоретико-экспериментальные функции $LTS(Term)$. Результат, представленный на рис. 10, демонстрирует хорошее сочетание теории и эксперимента, при этом охвачен достаточно большой спектр кредитов по качеству и срокам. Как итог получена эмпирическая формула связи *LTS* и срока кредитования:

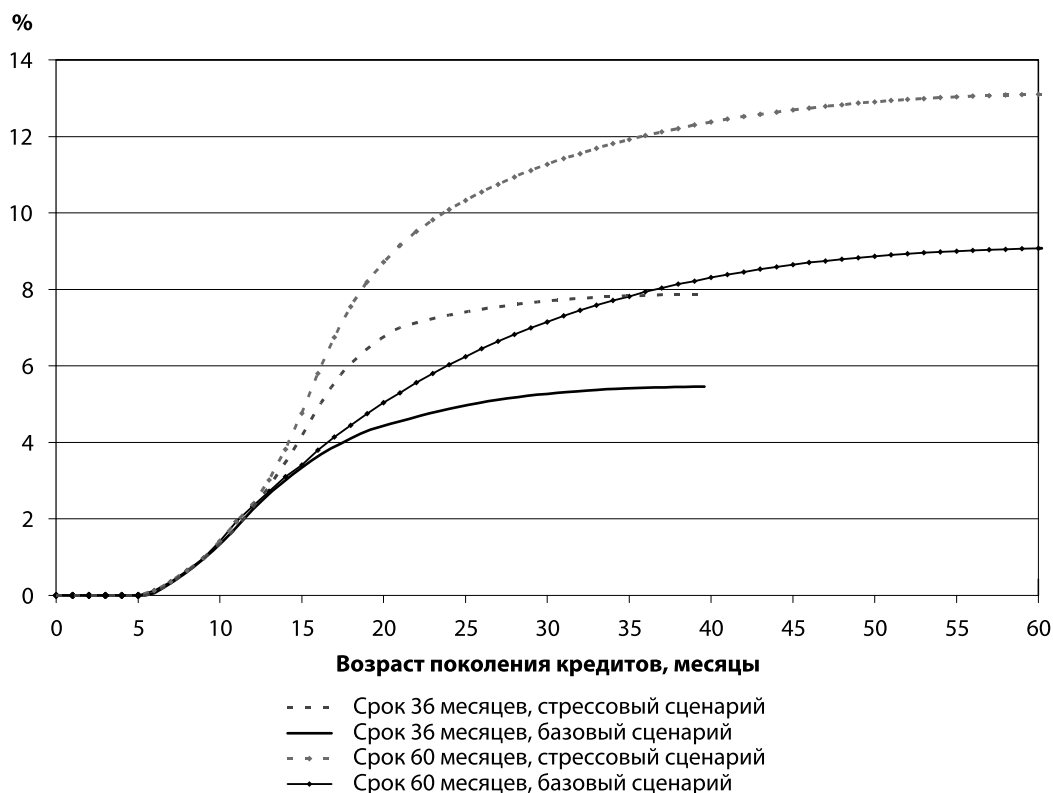
$$LTS_{\theta}(t_1) = \Lambda_{\theta}(t_1)Term_{\theta}; LTS_{\theta}(t_1) < 0,4.$$

Далее параметр $\Lambda_{\theta}(t_1)$ будем называть *удельным LTS (specific LTS)* для тенора θ в поколении кредитов t_1 . Для поколения в целом имеет смысл говорить об удельном *LTS* при условии, что качество каждого из теноров в составе поколения примерно одинаковое. Тогда мы можем записать для поколения следующее выражение:

$$\Lambda(t_1) = \frac{\sum_{\theta=1}^{\Theta} v^{\theta}(t_1, t_1)LTS_{\theta}(t_1)}{\sum_{\theta=1}^{\Theta} v^{\theta}(t_1, t_1)Term_{\theta}},$$

где $v_{\theta}(t_1, t_1)$ — объем выданных кредитов в поколении t_1 на срок $Term_{\theta}$. Расчет удельного *LTS* для кредитных портфелей (см. рис. 10) был произведен по этой формуле и усреднен по всем поколениям в составе кредитных портфелей. Так, на графике

Рис. 7. Созревание LTS (базовый и стрессовые сценарии, тенора 36 и 60 месяцев)



показаны четыре разных кредитных портфеля с удельными LTS, равными 0,14%, 0,24%, 0,43% и 0,68%.

Введем дополнительные определения.

PV (Present Value — текущая, или настоящая, величина) — сумма капитала, предоставляемого в кредит.

FV (Future Value) — общая сумма, получаемая кредитором, включая платежи по основному долгу и процентные платежи.

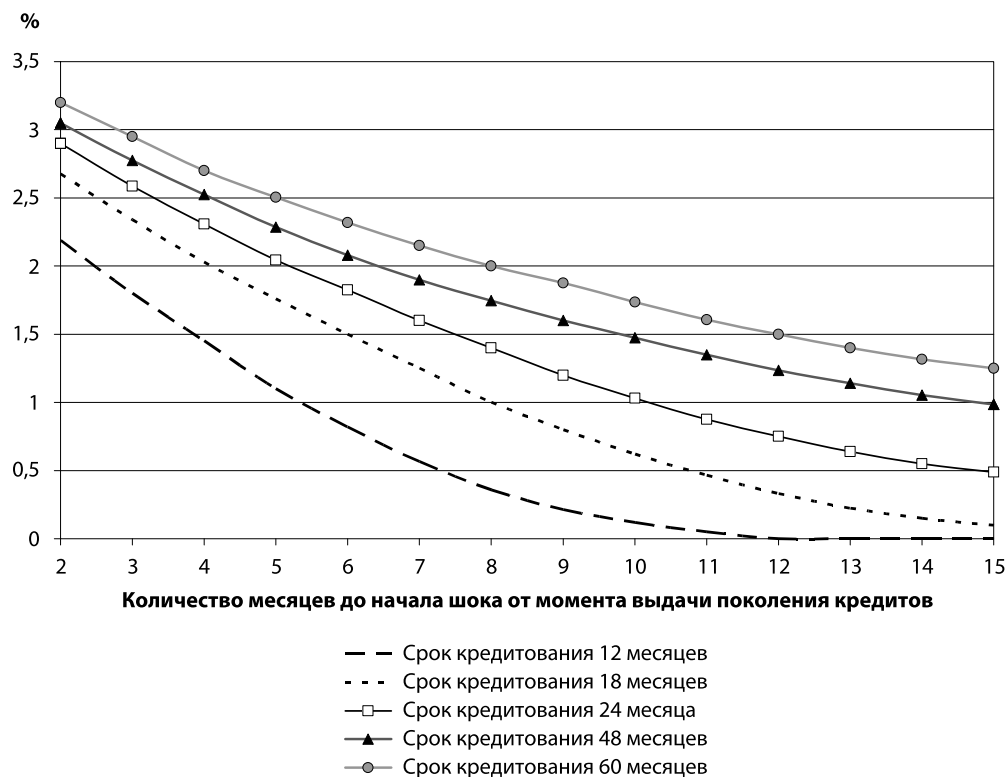
Rec (Recovery) — отношение собранной после списания задолженности к списанной задолженности. Сборы включают как платежи по основному долгу, так и процентные платежи.

Иследуем зависимость отношения $\frac{FV}{PV}$ от по-

казателя LTS. На рис. 11 представлена зависимость отношения $\frac{FV}{PV}$ от показателя LTS для различных теноров при условии, что $Rec = 0\%$, и при условии, что $Rec = 50\%$. Как видно из графиков, наклон кривых, отражающих зависимости, возрастает вместе с увеличением срока кредитования. Это связано с тем, что просрочки у клиентов начинаются преимущественно в начале срока кредитования.

Рассмотрим еще одну задачу: построим зависимость ставки безубыточности от параметров кредита. В состав себестоимости кредита входят

Рис. 8. Приращение *LTS* в результате воздействия шока, равного по силе кризису 2008–2009 гг.



ставка фондирования, расходы на выдачу и обслуживание, расходы, связанные с кредитными потерями.

Opex (Operation Expense) — операционные расходы (расходы, связанные с выдачей и обслуживанием кредитов); рассчитываются как отношение общей суммы операционных расходов в течение года к выданному в течение года объему портфеля.

r^0 — ставка безубыточности.

Rate — ставка фондирования ($rate_{(T)}$ — ставка для займов на срок T).

D (Duration) — дюрация, средневзвешенный по объему ежемесячных возвращаемых сумм (по основному долгу) срок жизни кредита.

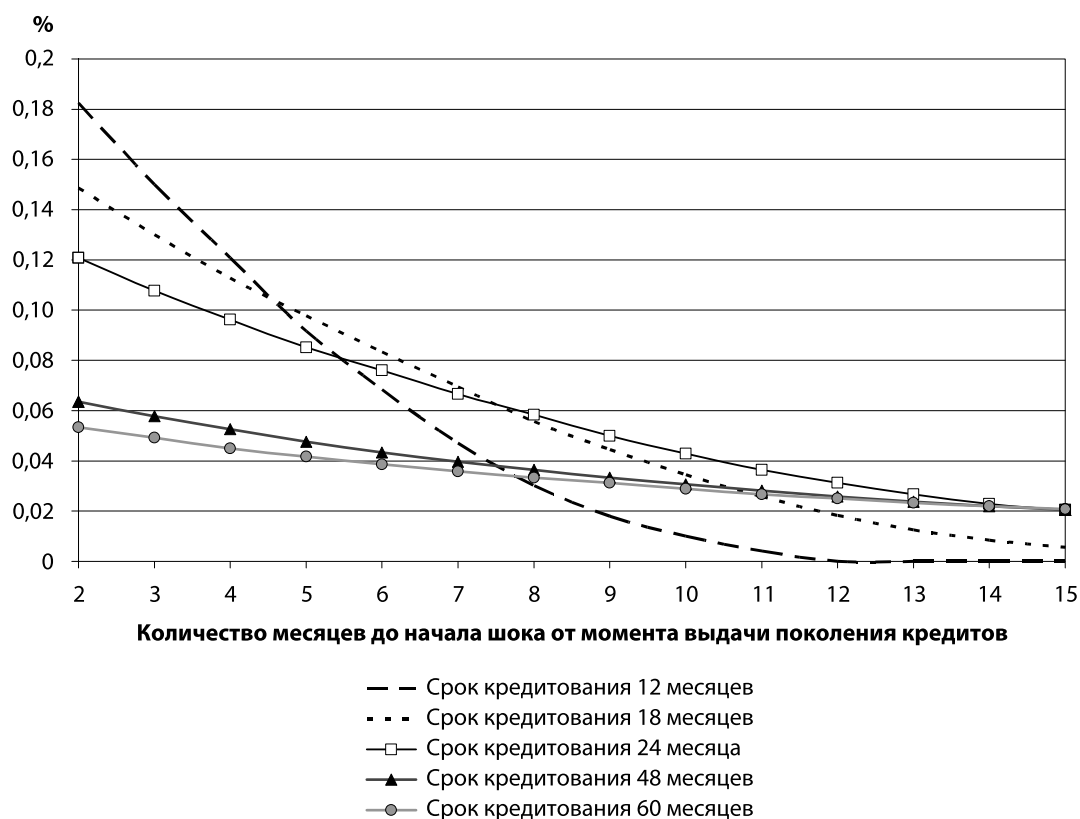
На рис. 12 приведена зависимость дюрации от срока кредита, как видно из графика: $D \approx \frac{Term}{2}$.

Зависимости дюрации от срока кредита, отношения — от качества и срока, а также ставки безубыточности были исследованы при помощи описанных в статье методов. Следующая формула дает представление о связи ставки безубыточности, ставки фондирования, дюрации, операционных расходов, ссудного срока, качества кредитов и показателя собираемости просроченной задолженности:

$$r_0^0(t_1) \approx rate_{\left(\frac{Term_0}{2}\right)} + opex + (2 + 0,015 Term_0)(1 - rec_0) \frac{LTS_0(t_1)}{Term_0} \tag{11}$$

Коэффициент 0,015 получен расчетно-экспериментальным способом и является следствием того, что заемщики просрочивают платежи по

Рис. 9. Приращение удельного *LTS* в результате воздействия шока, равного по силе кризису 2008–2009 гг.

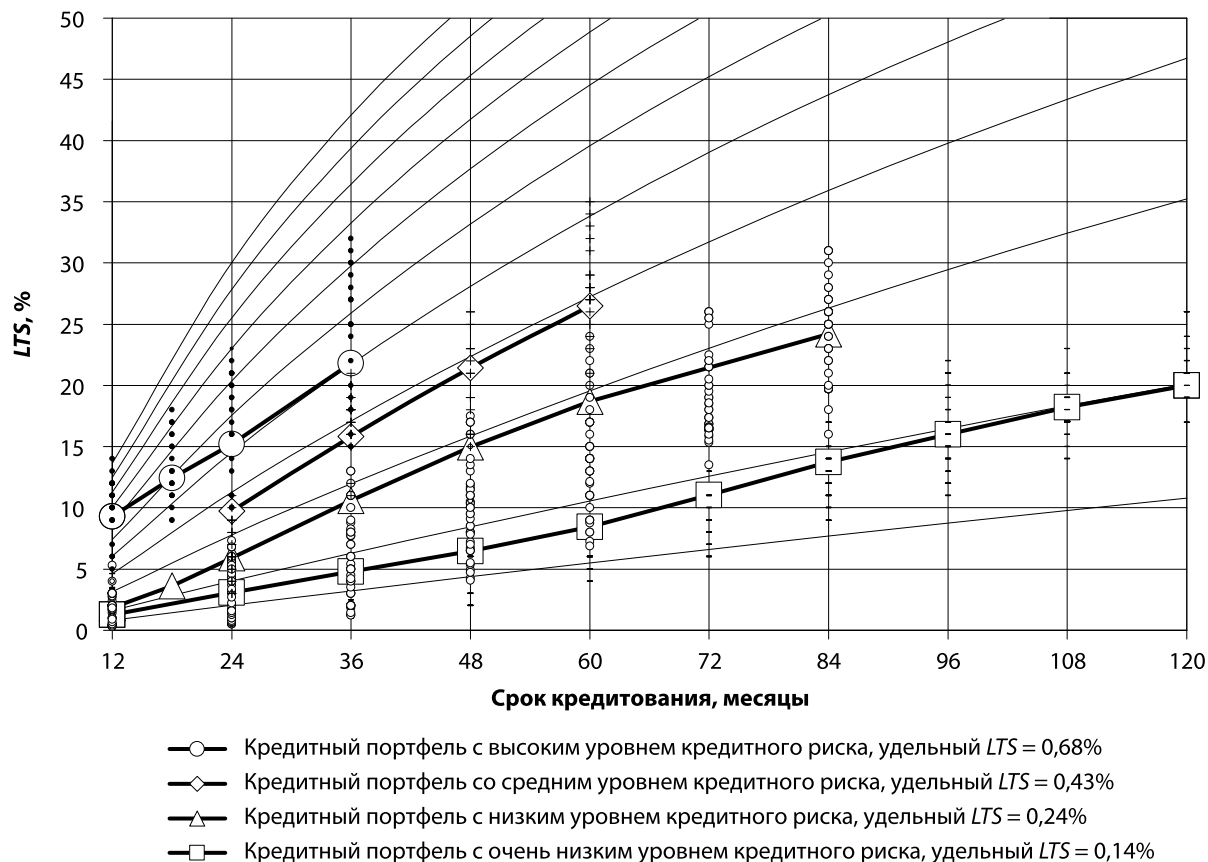


большей части в начале кредитования. Этот эффект более ощутим для долгосрочных ссуд и весьма значим при расчете ставки безубыточности.

На рис. 13 дана графическая иллюстрация формулы для безрисковой ставки процента на примере конкретного портфеля. На базе этого примера рассмотрим ставку безубыточности $r^0 = 22\%$. Согласно рис. 13 этому уровню соответствует срок кредита 48 месяцев с удельным *LTS*, равным 0,4%, но, например, для кредитов, выдаваемых на 60 месяцев, удельный *LTS* при этом уровне безубыточности уже не может превышать 0,28% и т.д. Такая диаграмма дает ответ на вопрос

о том, какие требования предъявлять к заемщикам в зависимости от срока ссуды, также появляется возможность оптимизировать ставки по выдаваемым ссудам в зависимости от их качества и сроков. Автоматизированная информационно-аналитическая система, реализованная на принципах матричной декомпозиции и метода многомерной временной динамики (Dual-time-dynamics), регулярно и для каждого портфеля обновляет такую диаграмму, которая является своеобразным «портретом» кредитного портфеля. В целях наглядности можно отобразить на диаграмме положение конкретного поколения кредитов.

Рис. 10. Пример расчета *LTS*: эмпирико-теоретические зависимости

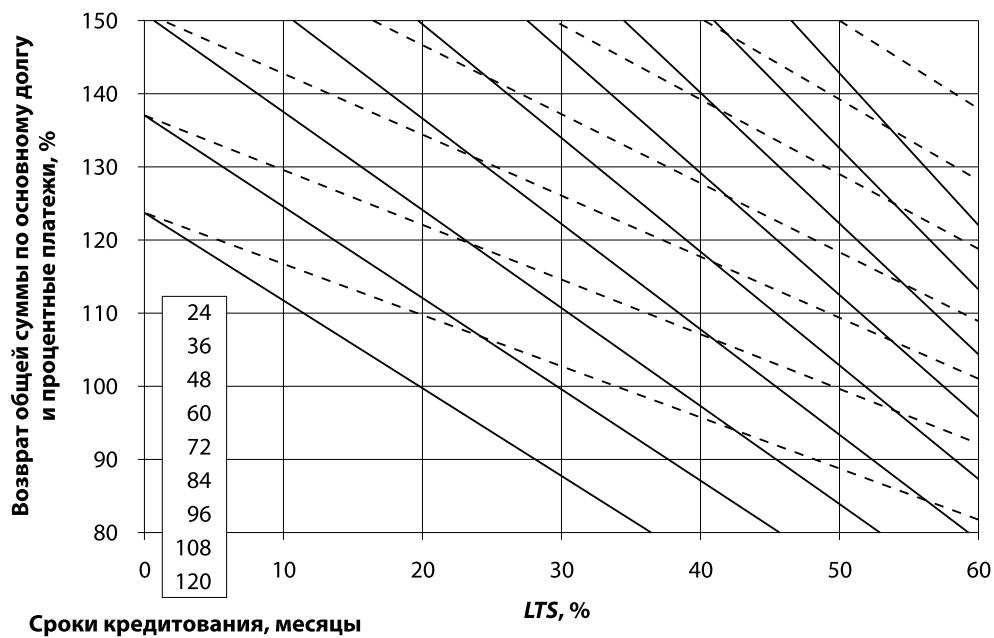


ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанный в статье подход матричной декомпозиции совместно с методом Dual-time-dynamics позволяют изучить широкий спектр типов кредитных портфелей (потребительские кредиты, кредитные карты, ипотека, автокредиты) как с реструктуризацией, так и без нее. Кроме того, он помогает решить множество сложных аналитических задач. Оценки, произведенные с помощью описанной

методологии, остаются релевантными при разнообразных условиях и отображают как изменения в бизнес-процессах, так и во внешней среде. Этот подход к оценке поведения кредитных портфелей имеет множество преимуществ, главным образом в силу высокой точности. Модели, основанные на нем, применяются для получения информативных аналитических отчетов о поведении кредитных портфелей, для стресс-тестирования и для анализа развития макроэкономических кризисов.

Рис. 11. Зависимость отношения FV / PV от срока кредита и от LTS при ставке 24% годовых



Примечание: зависимости представлены для теноров 24, 36, ..., 120, зависимость внизу соответствует тенору 24, пунктиром показана зависимость при $Res = 50\%$.

Рис. 12. Зависимость дюрации по поколению от срока кредитования

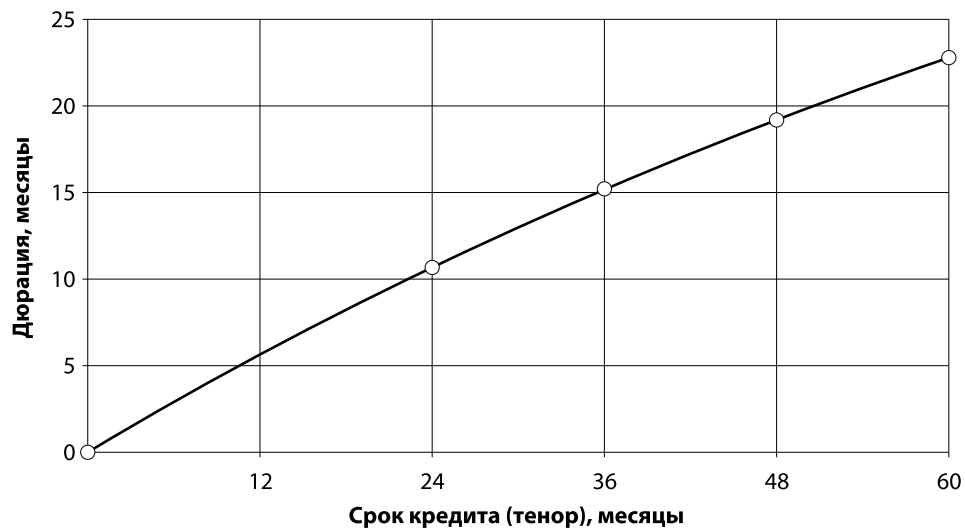
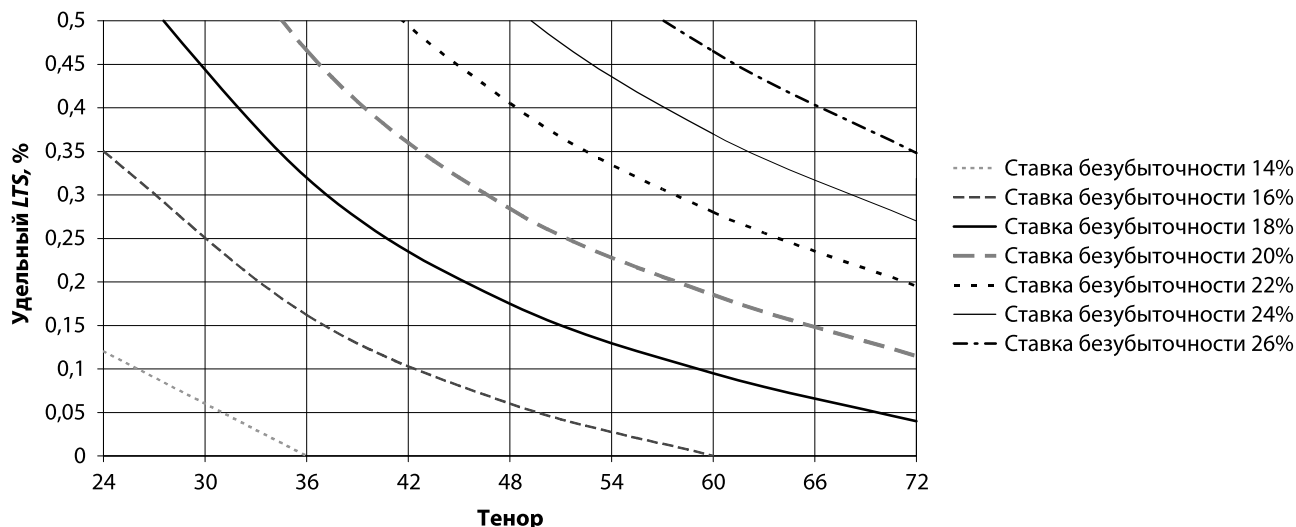


Рис. 13. Связь удельного LTS , срока кредитования и ставки безубыточности r^0 

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабиков В.Г. Ценные бумаги. Прикладные методы прогнозирования. — М.: МФТИ, 1999. — 114 с.
2. Bauschke H. (1996). «The approximation of fixed points of compositions of non-expansive mappings in Hilbert space». *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 202, No. 1, pp. 150–159.
3. Breeden J.L. (2007). «Modeling data with multiple time dimensions». *Computational Statistics and Data Analysis*, Vol. 51, pp. 4761–4785.
4. Breeden J.L., Thomas L., McDonald III J.W. (2008). «Stress-testing retail loan portfolios with dual-time dynamics». *The Journal of Risk Model Validation*, Vol. 2, No. 2, pp. 43–62.
5. Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. (1985). «A theory of the term structure of interest rates». *Econometrica*, Vol. 53, pp. 385–407.
6. Friesz T.L., Mookherjee R. (2006). «Solving the dynamic network user equilibrium problem with state-dependent time shifts». *Transportation Research, Part B*, Vol. 40, No. 3, pp. 207–229.
7. Friesz T.L., Tseil K., Changhyun K. and Rigdon M.A. (2011). «Approximate network loading and dual-time-scale dynamic user equilibrium». *Transportation Research, Part B*, Vol. 45, No. 1, pp. 176–207.
8. Halpern B. (1967). «Fixed points of nonexpanding maps». *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 73, No. 6, pp. 957–961.
9. Richards P.I. (1956). «Shock waves on the highway». *Operations Research*, Vol. 4, No. 1, pp. 42–51.
10. Samuelson L. (1998). *Evolutionary Games and Equilibrium Selection*. MIT Press.
11. Xu H.K. (2003). «Iterative algorithms for nonlinear operators». *Journal of the London Mathematical Society*, Vol. 66, No. 1, pp. 240–256.
12. Xu Y., Wu J., Florian M., Marcotte P. and Zhu D. (1999). «Advances in the continuous dynamic network loading problem». *Transportation Science*, Vol. 33, No. 4, pp. 341–353.
13. Zhang A. (2009). *Statistical Methods in Credit Risk Modeling*. A dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for Ph.D. (Statistics) in The University of Michigan.